编号_____

# 南京航空航天大学

# 毕业设计

题　目　转子临界转速计算方法研究及实验验证


学生姓名　于平超

学　　号　070930122

学　　院　民航/飞行学院

专　　业　民航机务工程

班　　级　0709301

指导教师　陈果 教授


二〇一三年六月

# 南京航空航天大学

# 本科毕业设计（论文）诚信承诺书

本人郑重声明：所呈交的毕业设计（论文）（题目：转子临界转速计算方法研究及实验验证）是本人在导师的指导下独立进行研究所取得的成果。尽本人所知，除了毕业设计（论文）中特别加以标注引用的内容外，本毕业设计（论文）不包含任何其他个人或集体已经发表或撰写的成果作品。

作者签名：　　年　月　日

（学号）：

# 转子临界转速计算方法研究及实验验证

## 摘　要

旋转机械在高速运转中总是不可避免产生振动，尤其在临界转速附近，振动明显增大，造成机械部件损坏甚至发生事故。因此，转子系统的临界转速就成为了旋转机械动力学设计的一个重要内容。准确计算旋转机械的临界转速、合理配置转子-支承系统，从而使临界转速远离工作转速是旋转机械设计的一个重要课题。当前，计算转子临界转速的方法主要为传递矩阵法和有限元法。本文主要对这两种方法的理论进行了研究，然后分别采用这两种方法基于 MATLAB 编写了计算转子系统临界转速的通用程序，同时对 ANSYS 软件求解转子临界转速的方法也进行了研究，最后利用实际转子试验器实验验证上述方法的正确性。具体工作如下：

（1）研究了转子临界转速的测试方法，利用 ZT-3 试验台搭建转子试验器，实验得到其临界转速和振型；

（2）研究了计算转子临界转速的传递矩阵法和有限元法，然后基于这两种方法分别编写计算临界转速的通用 MATLAB 程序，同时采用 MATLAB 的 GUI 实现友好的人机交互界面，计算出了转子试验器的临界转速和振型；

（3）研究了有限元分析软件 ANSYS 计算转子临界转速的方法，然后在 ANSYS 中，一方面采用梁单元建立转子试验台的一维模型，另一方面采用实体单元建立其三维模型，分别求解临界转速和振型；

（4）将几种方法求得的结果与实验结果进行比较分析，验证这几种方法的正确性。

**关键词：**转子,临界转速,传递矩阵法,有限元法

# Research on critical speed calculation of rotor and experimental verification


## Abstract

The vibration is inevitable for the rotating machinery at high speed ,especially in the vicinity of the critical speed, the vibration amplitude increases significantly, which can result in the damage of mechanical components even accident. Therefore, the critical speed of the rotor system has become an important content in the dynamic design of the rotating machinery. Calculating the critical speed of the rotating machinery accurately and collocating the rotor-bearing system reasonably, which can make the critical speed be far away the working speed, become an important subject in the design of rotating machinery. Currently, the main calculating methods for the critical speed are Transfer Matrix Method and Finite Element Method. In this paper, the theories of these two methods were studied, and then the calculation program was written using MATLAB, also, how to use the ANSYS to solve the critical speed were studied. Finally, the correctness of the calculation method were verified. The main tasks of this paper are as follows:

(1) The test methods of the rotor critical speed were studied. Build the rotor tester using ZT-3 and got its critical speed and modes through experiment.

(2) The Transfer Matrix Method and Finite Element Method to calculate the critical speed of the rotor system were studied, and then generic MATLAB program were written and the MATLAB GUI were used to achieve a friendly man-machine interface, and the critical speed of rotor tester were calculated.

(3) How to use the finite element analysis software-ANSYS to calculate the critical speed were also studied, and then the one-dimensional model and three-dimensional model were built using beam element and solid element respectively in ANSYS, and the models' critical speed and modes were solved.

(4) The results obtained by several methods were compared with the experimental results, which verified the correctness of these methods.


Key Words: Rotor; Critical speed; Transfer Matrix Method; Finite Element Method

# 目 录

摘要 ..... i
Abstract ..... ii
第一章 绪论 ..... 1
1.1 引言 ..... 1
1.2 国内外研究现状 ..... 2
1.3 本文的研究内容 ..... 4
第二章 临界转速理论及转子试验设备 ..... 6
2.1 临界转速理论 ..... 6
2.1.1 临界转速分析 ..... 6
2.1.2 转子临界转速测试 ..... 7
2.2 实验设备以及测试系统 ..... 10
2.2.1 实验器材介绍 ..... 10
2.2.2 软件介绍 ..... 12
2.3 试验测试 ..... 14
2.3.1 转子试验台 ..... 14
2.3.2 支承刚度测量实验 ..... 15
2.3.3 临界转速测量实验 ..... 18
2.4 本章小结 ..... 20
第三章 基于传递矩阵法的临界转速特性分析 ..... 21
3.1 计算模型建立 ..... 21
3.2 基于传递矩阵法的临界转速分析 ..... 23
3.2.1 转子质量的离散化 ..... 23
3.2.2 分段原则 ..... 24
3.2.3 典型部件的传递矩阵 ..... 25
3.2.4 传递矩阵法求解临界转速原理 ..... 28

3.3 基于 MATLAB 软件的传递矩阵法编程 ..... 30
3.3.1 MATLAB 简介 ..... 30
3.3.2 基于 MATLAB 的编程 ..... 31
3.4 临界转速计算分析 ..... 33
3.5 本章小节 ..... 34
第四章 基于有限元法的临界转速特性分析 ..... 35
4.1 有限元建模原理 ..... 35
4.1.1 单元的运动学方程 ..... 35
4.1.2 建立系统的运动学方程 ..... 41
4.1.3 转子系统的涡动频率与临界转速 ..... 43
4.2 基于 MATLAB 的有限单元法编程 ..... 44
4.3 临界转速计算分析 ..... 45
4.4 本章小结 ..... 47
第五章 基于 ANSYS 软件的临界转速特性分析 ..... 48
5.1 ANSYS 解决转子动力学问题 ..... 48
5.1.1 ANSYS 求解临界转速的一般步骤 ..... 48
5.1.2 有限元模型 ..... 49
5.2 一维有限元计算结果分析 ..... 51
5.3 三维有限元计算结果分析 ..... 52
5.4 几种方法计算结果总结分析 ..... 53
5.5 本章小结 ..... 54
第六章 总结与展望 ..... 55
6.1 全文工作总结 ..... 55
6.2 论文工作展望 ..... 55
参考文献 ..... 57
致谢 ..... 58

# 第一章 绪论

## 1.1 引言

旋转机械被广泛地应用于包括燃气轮机、航空发动机、工业压缩机以及各种电动机等机械装置中。旋转机械中转子系统的临界转速是旋转机械设计过程中必须考虑的一个重要参数，其计算结果的准确与否直接影响着机器运行的可靠性和安全性[1]。对于高可靠性的航空发动机来说，转子系统的设计非常重要[2]。众所周知，合理配置转子-支承系统的临界转速，是保证航空发动机能够安全可靠运行的一个重要前提。在发动机整体方案设计阶段，可以通过估计临界转速的方式来分析总体结构方案是否合理；在工程设计阶段，则需要仔细计算临界转速，同时考虑是否需要采用弹性支承从而保证临界转速远离工作转速的范围[3]。

旋转机器的结构往往是很复杂的。例如汽轮发电机组包含发电机的转子和汽轮机的转子。发电机转子细而长，有许多嵌在线槽中的导线。要研究实际转子系统的动力学特性，需要把实际结构简化为合理的模型才能进行理论分析。简化模型决定了分析过程中的难易程度和分析结果的可靠程度。所谓简化模型就是以某些主要参数尺寸、弹性刚度、阻尼系数、质量等表示的力学模型。

对于转子系统临界转速的计算方法，目前工程中存在多种，主要分为两大类：传递矩阵法和有限元方法[4]。传递矩阵方法的优点是矩阵的阶数不会随着系统自由度的增加而增大，因而程序运行速度快、编程简单、内存占用率小，尤其适用于具有链式结构的转子的临界转速分析，但是对于考虑支承系统的转子结构临界转速分析就显得比较困难。有限元方法的表达式简单规范，而且能够避开传递矩阵法的数值不稳定和漏根现象，特别适用于转子和周围结构组成的复杂结构的分析，可以很好地兼顾模型的完整性和分析的准确度，计算结果更为稳定且计算精度高，但是它也存在计算时间长、内存占用率高等缺点。随着计算机技术的发展，转子系统的有限元模型得到不断的改善，在模型的计算中可以考虑陀螺力矩、转动惯量、轴向载荷等因素的影响，也开发了许多基于有限元方法的商业软件：ABAQUS、NASTRAN、

ANSYS 等。对于线性转子系统，目前的建模和分析方法已经比较成熟，基于有限元方法计算出的转子系统的临界转速已经比较接近于实测值[5]。

## 1.2 国内外研究现状

转子动力学的发展，是与大工业的发展紧密相关的。1869 年，Rankine 发表了题为“论旋转轴的离心力”一文，这是第一篇有记载的研究转子动力学的文献，标志着转子动力学的诞生。1919 年，英国著名的动力学家 H.H.Jeffcott 应邀参加了转子动力学的研究。他研究的模型是跨度中央有单盘的无质量柔性轴，其两端为刚性支承，这一简化挠性转子模型，后来也就被称为 Jeffcott 转子。二十世纪二、三十年代，伴随工业的发展，要求许多转子工作在超临界转速下，转子的临界转速与稳定性问题逐渐暴露出来，学者们进行了许多的基础性研究，使人们对转子动力学的认识产生了又一次的飞跃。五十年代以来，航空工业、电力工业、船舶工业、石油化工等部门的迅速发展，又从根本上推动了转子动力学的发展。

虽然学者们对高速旋转机械产生的动力学问题进行了大量研究，但是伴随对机器工作要求的提高、机器工作环境的恶化以及转子-支承系统的结构高度复杂化，与轴系振动相关的事故不断发生。资料表明，在美国投用的涡轮压缩机中，有 22%的非正常停机与轴系设计有关，而其中与振动有关的则超过 50%。

转子系统的振动主要包括弯曲振动和扭转振动，其中弯曲振动是转子动力学研究的核心内容，其中主要包括临界转速计算，不平衡响应分析与稳定性分析。此外，残余不平衡量计算与柔性转子平衡技术、瞬态响应分析等也是转子动力学研究的主要内容。随着旋转机械向高转速、高负荷发展，以及在航空航天中的旋转机械大量使用轻型薄壁构件，多自由度的复杂转子支承系统成为现代转子动力学的主要研究对象。

由于转子系统的高度复杂化，转子结构出现了许多以前没有发生过的振动问题。从激振源来看，主要包括：由于转子自身不平衡引起的强迫振动；以滑动轴承为支承的转子机械中，由油膜自激涡动引发的转子振动，主要分为半速涡动和油膜振荡；伴随转子转速以及封严结构两端压差的提高，密封腔流体激振对转子振动的影响也越来越明显。

由于以上因素的存在，转子在临界转速下必然会产生剧大的振动，甚至可能产生灾难性的后果。同时伴随现代流体机械转子部件转速的提高，绝大部分的转子工作转速都高于低阶临界转速。这使得众多的激振因素同低阶临界转速有关。因此转子临界转速成为了影响转子

振动的一个重要因素，如何正确预计临界转速，使转子工作转速与它的临界转速相避开，成为旋转机器转子设计的重要基础。

要较为准确地确定转子支承系统的临界转速，首先必须选用一种合适的计算方法，其数学模型和边界条件等尽可能符合系统的实际情况。目前已经发展出多种较为完善的临界转速计算方法，主要包括传递矩阵法和有限单元法。

1944 年 N.O.Myklestad，1945 年 M.A.Prohl 把 H.Holzer 用以解决多圆盘轴扭振问题的初参数法成功地推广到解决轴的横振动问题[6]。从而可以用简单的计算工具，通过表格化的方式来求解转子临界转速。伴随电子计算机的快速发展以及在研究振动问题时采用矩阵运算，初参数法发展成了传递矩阵法，通称作 Prohl 传递矩阵法。其最大优点是每一阶临界转速的计算方法是完全相同的，程序简单，所需要的贮存单元少，耗费的机时短。因此传递矩阵法逐渐成为解决转子动力学问题的快速有效的计算方法，得到了广泛采用。但是这种方法在求解大型高速转子系统动力学问题的时候，极有可能发生数值不稳定现象。最近几年来出现的 Riccati 传递矩阵法，保留了传递矩阵法的全部优点，且在数值上比较稳定，计算精度高，是一种比较理想的计算求解方法，但目前还未普遍推广使用。

有限单元法求解转子动力学问题开始于 1970 年，起初只考虑了转子仅存在移动惯性情况的弯曲振动问题[7]。随着研究的深入，转子系统的有限元模型得到不断完善，在模型中开始逐渐计入转动惯量，陀螺力矩，轴向载荷，剪切变形以及内阻外阻的影响等因素[6]。考虑了各种因素的有限元模型更能够模拟真实的情况，故计算精度高是其主要优点。同时，高速大容量计算机的问世，使得大型数值计算成为可能。因此，近十年用有限元方法来解决转子临界转速，不平衡响应问题以及稳定性的问题等方面取得了不错的结果。当然，有限元法的缺点也很突出，相比传递矩阵法而言，其程序复杂，需要更多的计算机资源。因此，对于大型复杂转子工程计算问题，必须进行模型简化，缩减其自由度。

此外，在有限元法发展的同时，国内外学者还提出了其它多种算法，如模态综合法等。70 年代中后期，学者们又将模态综合法与有限元法结合，来解决多转子航空发动机等复杂转子系统的动力学特性求解问题。实际工程应用中，如果转子系统规模庞大、结构复杂，往往是传递矩阵法、有限单元法、模态综合法等方法综合运用。

近年来，随着有限元软件在我国的推广，利用有限元软件进行转子系统动力特性分析备

受关注。目前，国际上大型通用的有限元软件包括：NASTRAN、MARC、ANSYS 等[7]。但是，由于计算机配置以及有限元软件的限制，进行转子系统动力特性分析需要建立简化合理的有限元模型。在 ANSYS 软件中，有多种单元均可以考虑陀螺效应，从而解决转子系统的动力学问题。采取不同的建模方法，使用不同的单元类型，计算的速度和结果的精度不同。如使用一维有限元模型，轴段采用梁单元离散，计算速度快，但精度相对较差；使用三维实体单元建模，会得到数目剧大的节点和单元，对计算机内存以及计算机机时需求明显增加，但是计算结果会更加接近实际情况。各种模型分别有其优缺点，实际计算中，要根据具体情况采用合适的模型。

## 1.3 本文的研究内容

本文主要是针对一般转子系统，研究了求解其临界转速的计算方法及理论，并通过 MATLAB 进行了实现，同时也对商业有限元软件 ANSYS 求解转子临界转速的方法进行了研究，并进行了实际转子临界转速的求解，最后对这几种方法采用实验验证其正确性。当前，有多种计算方法可以求解转子临界转速。首先，分别编写 Prohl 传递矩阵法和基于梁模型的有限单元法的 MATLAB 程序，采用 MATLAB 的 GUI 建立参数输入界面以及结果显示界面，输入实际转子器参数，求出其临界转速和对应振型；然后使用 ANSYS 软件，分别采用一维梁模型和三维实体模型对实际转子器建模，求解临界转速和对应振型；最后实验测得真实的临界转速和振型，将上述所得结果进行比较，验证各种计算方法的正确性。各个章节内容如下：

第一章，讨论了本课题的研究背景，总结了转子动力学的发展过程，并阐述了转子系统临界转速计算方法的发展历程。

第二章，介绍转子动力学中临界转速的相关概念以及临界转速的实验测试方法，然后对实验测试设备进行了介绍，并搭建了实际转子试验台，实验测试出其临界转速，为后续章节提供基础。

第三章，研究了计算转子临界转速的传递矩阵法， 编写 MATLAB 通用计算程序以及参数输入界面，并对搭建的转子试验台进行临界转速求解。

第四章，研究了计算转子临界转速的有限元法， 编写 MATLAB 通用计算程序以及有限元法的求解界面，对搭建的转子试验台进行临界转速求解。

第五章，介绍了 ANSYS 软件，并对 ANSYS 求解转子动力学问题的方法进行了研究，然后分别采用梁单元和实体单元对试验台模型进行求解，将几种计算方法得到的结果与实验进行了对比。

第六章， 对论文所做工作进行了总结，同时对后续工作进行了展望，为后面工作的展开提供铺垫。

# 第二章　临界转速理论及实验测试

旋转机械在高速旋转过程中不可避免的产生振动，尤其在其临界转速附近，振动幅值明显变大，甚至可能损坏机器，产生事故。因此，对于旋转机械而言，临界转速分析是其重要内容之一。

## 2.1 临界转速理论

### 2.1.1 临界转速分析

一般而言，转子的运动可以看成两种运动的组合运动，一方面是圆盘绕转子的轴自转，另一方面是弯曲的轴绕轴承中心连线的公转运动，也称之为进动。在转子动力学中，我们将这两种运动的组合运动称为涡动。定义圆盘自转角速度为$\omega$，弯曲轴绕轴承中心连线的进动角速度为$\Omega$。当$\omega=\Omega$并且转向相同的涡动称之为同步正进动或者是同步正向涡动。当$\omega=\Omega$并且转向相反时，称之为同步反进动或者是同步反向涡动[5]。在计算转子系统的临界转速时，通常只需要考虑同步正向涡动时的临界转速。因为实际上转子运行时，由于不平衡质量的激励，转子将作同步正向涡动，故对于同步正向涡动的临界转速，应该予以重视，因此通常所谓转子的临界转速，一般是指同步正向涡动时的临界转速[6]。

在实际转子设计中，转盘往往不一定安装在转轴中央，或者是关于两支承不对称。在这种情况下，当转子旋转时，弹性轴受到圆盘偏心产生的离心力作用，将会出现弯曲动挠度，此时，圆盘运动除了自转运动和横向运动外，还会产生偏离原来平面的偏摆运动。这种偏摆运动会使每一部分质量在旋转过程中所产生的惯性力不出现在同一个平面内，因此会出现一个使转轴挠曲角度产生变化的力矩，把它称作陀螺力矩。由于陀螺力矩存在，使得转子的临界转速与不计这种偏摆影响时的不同。在反进动时，陀螺力矩使转子轴的变形变大，从而降低了转子轴的弹性刚度，使转子临界转速降低。在正进动时，它使转子轴的变形减小，因此转子轴弹性刚度有所提高，从而临界转速变大。计算转子临界转速时，一般是指与正进动角

速度相等时的转动角速度，因此应按照$\omega = \Omega$的条件来计算转子临界转速。

对于复杂大型转子系统，求解临界转速方法多采用传递矩阵法和有限元法。50 年代中期，传递矩阵法开始应用于转子系统的动力学分析和临界转速计算，至今仍占有重要地位。有限元法解决转子动力学问题始于 1970 年，随着研究深入，转子系统有限元模型不断加以完善，同时，许多基于有限元的商业软件如 ANSYS 等工具的诞生以及大型数字计算机的发展，也在很大程度上促进了有限元法在解决转子动力学问题方面的进展。后续章节中将重点讨论以上各种方法。

### 2.1.2 转子临界转速测试

当前，测量转子临界转速的方法很多，每种各有其特点和局限性。对于航空发动机复杂转子结构，为了能够准确测出它的临界转速，可以根据测试条件选择不同的测试方法，达到互相验证，从而保证测量结果的准确性[18]。通常，转子临界转速测量方法包括振幅峰值法、转子质心转向法、轴心轨迹法以及三位转速谱（瀑布图）方法。

（1）振幅峰值法

根据所测转子的振幅示波曲线和进动状态来判定转子临界转速。当转子的振幅波形处在峰值区同时转子又作正向涡动时，则该峰值区所对应的转速为临界转速。在转子系统阻尼不大时，采用振幅峰值法测定转子临界转速较为简单易行。但是在确定振幅峰值区的取值范围时，往往因为阻尼、加减速过临界以及转子本身机械质量等问题，影响到所测振幅的准确性而导致误差，因此测量精度不高。为了较为准确地识别得到转子的时域曲线，可以通过时域曲线得到其 bode 图，在频域中观察所采集的数据结果，从而识别出临界转速。

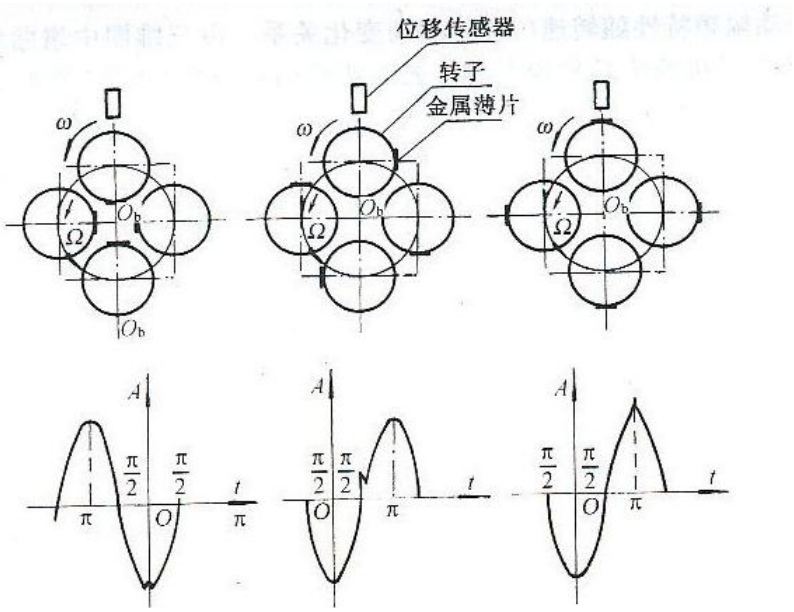
（2）转子质心转向法

转子过临界转速时的质心转向，是振动体振动前后振动相位角发生较大变化的一种现象。对于简单转子模型，一般在实验中，可通过间接观察和测试的方法判别出转子质心转向现象，从而测定转子临界转速。有两种方法可以识别质心转向现象，一种是滞后相位角法，另一种是质心转向方法。

滞后相位角法：按测量滞后相位角方法测出临界附近多个转速的滞后相位角，可发现在某一转速范围内，滞后相位角由小于$\pi/2$转到远大于$\pi/2$，这种现象表明了质心转向。在测

得转子不平衡量方位后，在转子的测量外径轻点位置上贴一金属薄片，用涡流式或其它振幅测量仪器测量并记录转子振幅。转子每转一周，金属薄片使振幅测量仪产生一次振幅突变的脉冲。若一金属薄片贴在转子轻点位置为例：亚临界时，转子质量中心向外，金属薄片在转子力传感器最远点产生一个厚度突增的脉冲，以此时脉冲与质心之间相位角为零。在临界时，相位角为$\pi/2$。超临界时，相位角跃变为$\pi$，表示质心向内。相位角为$\pi/2$时，所对应转子转速为临界转速。图 2.1 为试验转子通过临界转速前、后振动波形相位角的跃变过程。

用此法测量转子临界转速，其辨别率与转子弯曲变形程度无关。但转子加速的大小对测量有影响。加速过程，临界转速测量值偏高，减速过程则测量值偏低。因此在临界转速测定中，加速过程要慢些，不平衡量方位要测准，如能用相位计直接测滞后相位的跃变过程，则测定的临界转速准确性更高。



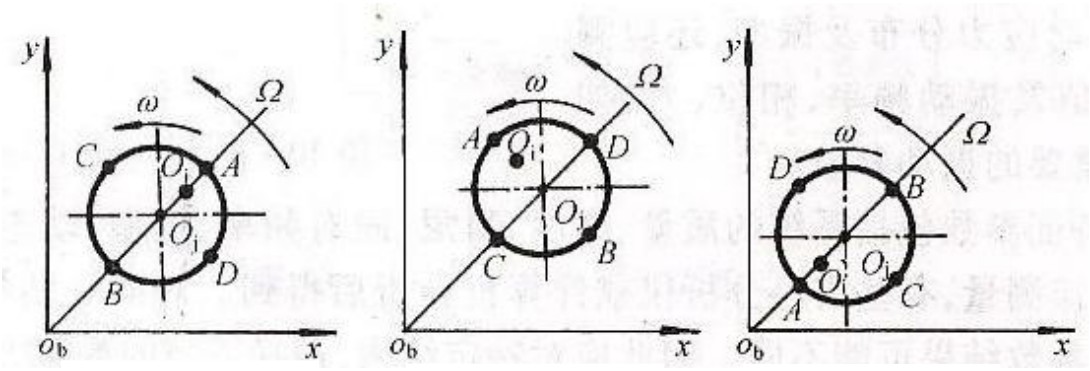

（a）亚临界状态　（b）临界状态　（c）超临界状态

图 2.1　转子通过临界前、后振动波形相位角的跃变过程

质心转向法：按测量轴表面应变的方法，利用贴在转子不平衡方位的应变片，录下通过临界转速前后的应变波形图，由应变波形图的平均值曲线的变化可以确定质心转向现象。

若在转子轴颈外径上取 A、B、C 和 D 四点，如图 2.2 所示，在不计阻尼情况下，当转子处在亚临界时，其质量中心$O_i$位于轴颈中心$O_j$的外侧，此时，A 点受拉，为正应变，B 点受

压，为负应变，C 点和 D 点无应变，如图 2.2(a)；超临界时，质量中心$O_i$位于轴颈中心$O_j$的内侧，此时，A 点受压，为负应变，B 点受拉，为正应变，C 和 D 点没有应变，如图 2.2(b)；临界转速状态时，质量中心$O_i$位于轴颈中心$O_j$与回转中心$O_b$连线顺转速$\Omega$方向$90^\circ$处，如图 2.2(c)，此时 A 点和 B 点为无应变的瞬时状态，其对应的转速即为临界转速。




（a）亚临界状态　　（b）临界状态　　（c）超临界状态

图 2.2 转子质心转向图

（3）轴心轨迹法

轴心轨迹法测定转子临界转速，是通过轴上同一截面位置互相垂直方向上的挠度信号经示波器显示，并有轴心轨迹上的脉冲波（脉冲波信号由粘贴在轴表面上的金属薄片所产生）的位置变化，对照测速仪器测得的对应转速，可观察判断转子是否通过临界区以及轨迹随转速的变化情况；亚临界转速时轴心轨迹圆较小，圆上两个尖脉冲波向外；临界转速时轨迹圆为最大，圆上两个尖脉冲与轨迹圆近似相切；超临界时，轨迹圆又变小，而两个尖脉冲指向圆内。如图 2.3 所示。

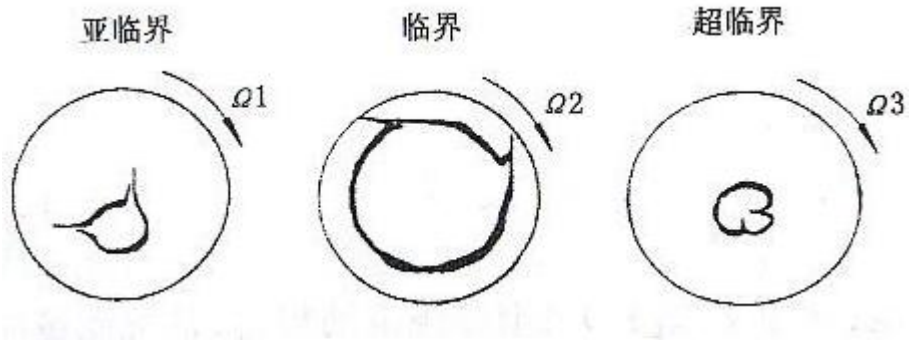



图 2.3 轴心运动轨迹

（4）三维转速谱图（瀑布图）分析法

利用转速跟踪测振系统测得发动机的转速、振动信号，以横坐标为频率，纵坐标为等转速间隔的振动响应功率谱，讲不通转速下的响应谱曲线画在同一张图上，形成一系列三维的图形，从而给出振动幅频特性随转速的变化关系。由三维图中谱曲线的峰值走向和变化情况，可判断发动机的临界转速范围。若曲线峰值组成的“山脉”其振动频率与转速成正比，且在某一转速范围内出现特别明显的峰值，则表明其为临界转速。如图 2.4 所示。瀑布图不仅可以判断转子临界转速，同时对于发动机振动特性的评价和故障识别也非常有用。

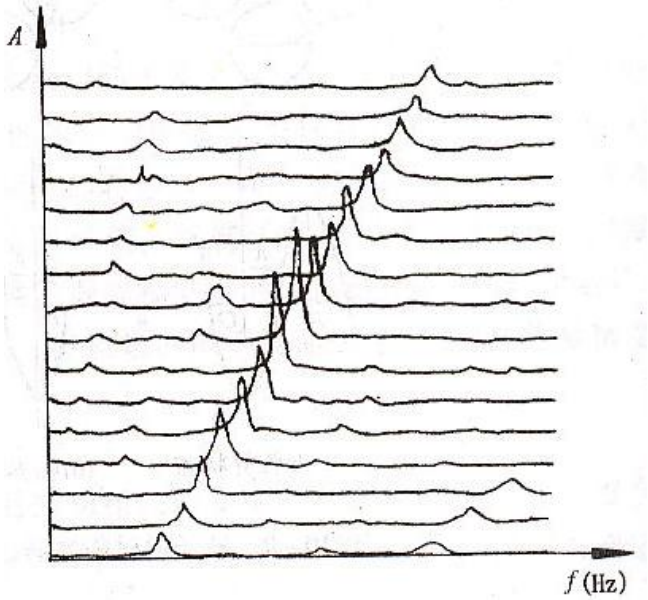



图 2.4 三维谱图（瀑布图）

## 2.2 实验设备以及测试系统

### 2.2.1 实验器材介绍

（1）ZT-3 转子试验台

ZT-3 多功能转子试验台由东大仪器厂研制，本转子振动试验台是一种用来模拟旋转机械装置振动的实验设备。主要用在实验室中验证转子轴系的自激振动和强迫振动特性，它可以有效地再现大型旋转设备产生的多种振动现象。

采用不同的选择来改变转子系统转速，质量不平衡，轴系刚度，轴承摩擦或者冲击条件以及联轴器的形式来模拟机器的实际运行状态，由配置的测试仪器来观察检测它的振动特性，

因此，本试验台可为专门从事振动测试，振动研究实验室和振动测试教学提供了有效而方便的试验手段。

该实验器材可以开展的科研工作包括以下几个方面：

1）旋转机械振动位移、速度、加速度测试研究；

2）模拟不平衡、不对中、碰摩、油膜涡动、基础松动、转轴裂纹等故障；

3）转子系统动平衡技术研究；

4）转子系统临界转速实验验证。

图 2.5 和图 2.6 为 ZT-3 模拟试验台和实物图。电动机通过联轴节带动转子旋转。转子转速根据光电传感器测得，电涡流传感器可以测测点位移。摩擦螺钉用来模拟转子系统碰摩故障。

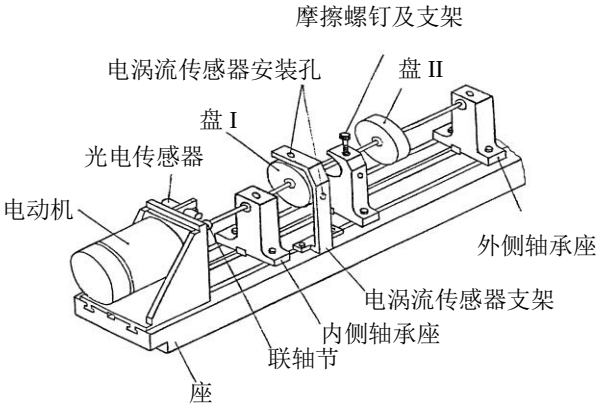



图 2.5　ZT-3 多功能转子模拟实验台

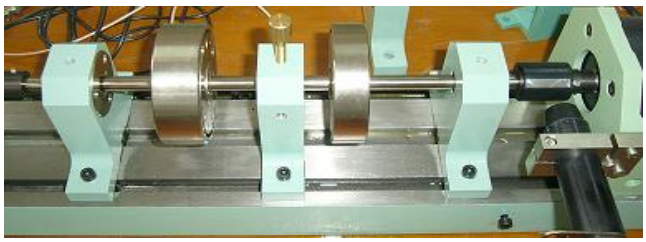


图 2.6　ZT-3 转子试验台实物图

（2）传感器

图 2.7 为电涡流传感器以及前置器。从转子动力学、轴承学的理论上分析，大型旋转机械设备的运动状态，主要取决其核心—转轴，使用电涡流传感器可以直接测量转轴的运行状态而不用与其接触，它可以为诸如转子不对中、不平衡、轴承发生磨损、轴产生裂纹及发生摩擦等机械故障问题的早期判定提供关键的信息。电涡流传感器通过电涡流传感器支架上的安装孔安装，对于每一个测点总是可以安装两个传感器测得其水平和垂直两个方向的相对位移，如图 2.5。

转子试验器转速由光电传感器测得。图 2.8 为反射式光电传感器的工作原理图，主要由被测旋转部件、反光片（或反光贴纸）、反射式光电传感器组成，在可以进行精确定位的情况

下，在被测部件上对称安装多个反光片或反光贴纸会取得较好的测量效果。在本实验中，由于测试距离近且测试要求不高，仅在被测部件上只安装了一片反光贴纸。图 2.9 为光电传感器实物图。实验时，反光贴纸可贴到联轴器上，因此，当旋转部件上的反光贴纸通过光电传感器前时，光电传感器的输出就会跳变一次。通过测出这个跳变频率 f，就可知道转速 n。

图 2.7　电涡流传感器及前置器

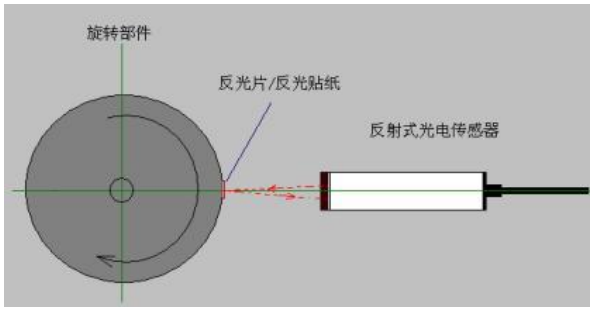



图 2.8 光电传感器原理图

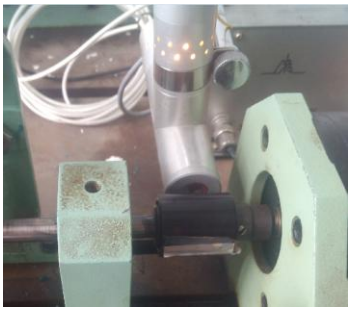


图 2.9 光电传感器实物图

### 2.2.2 软件介绍

实验采用的数据采集以及信号处理的软件为自主开发的旋转机械故障智能诊断系统 RFIDS1.0，它利用频谱分析技术、倒频谱分析、多重相关分析、时域同步平均分析、倍频分

析、轴心轨迹分析、小波变换等技术，构建了集旋转机械转子和滚动轴承故障信号采集、特征提取、状态监测与故障诊断为一体的智能诊断系统。此软件在 Windows98/2000/XP 平台下，由 VC++6.0 作为前台开发工具，Microsoft Access 2000 作为后台数据库支承的 Windows 应用软件，并采用 VC 与 Matlab 的动态链接库技术实现接口。

图 2.10 所示为工程管理主界面中，包括新建、删除、工程导入、工程导出、从外部导入实验数据等功能。所需要添加的信息包括：工程名、设备型号、实验现场图片等信息。 图 2.11 为打开工程界面，选择已有工程并打开，然后选择数据采集便可以进入数据采集主界面。如图 2.12 为数据采集主界面，包括时间波形显示、频谱曲线显示、设备型号选择、采集部位显示、采样频率选择、转速显示、当前信号选择、采集数据点数选择、通道配置、数据保存、模拟采集等功能。首次进入主界面首先进行通道配置，图 2.13 为通道配置界面。通道配置完成并保存后，便可以进行数据在线采集，主界面中可以实时显示时间波形曲线和频谱曲线，点击保存进入数据保存界面，可以实时保存数据，图 2.14 为数据保存界面。对于保存后的数据，再导入工程后进行模拟采集可以实现再现。此外还可以显示数据的 bode 图，如图 2.15 所示。

图 2.10 新建工程界面

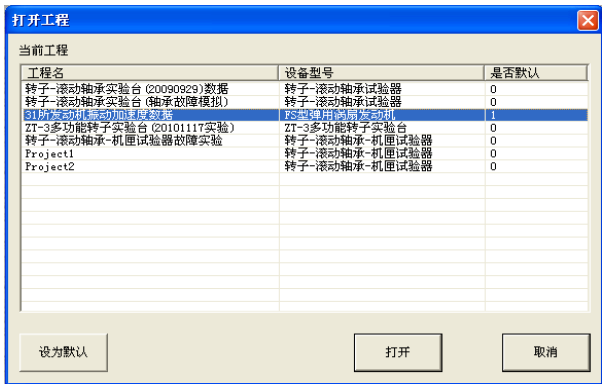



图 2.11 打开工程界面

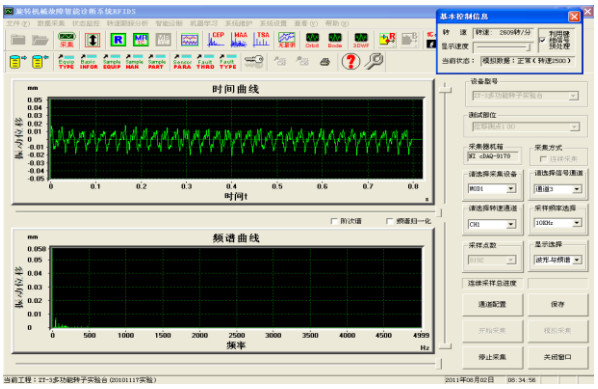



图 2.12 数据采集主界面

图 2.13 通道配置界面

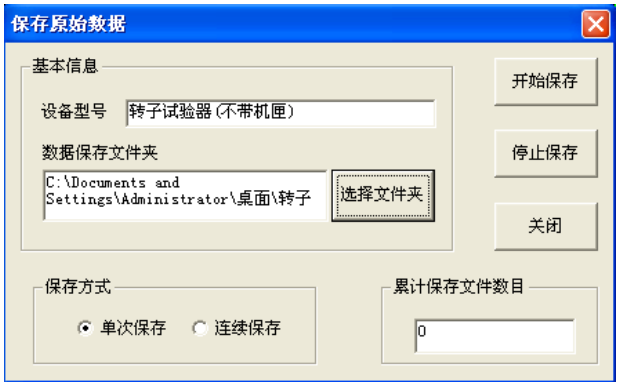



图 2.14 数据保存界面

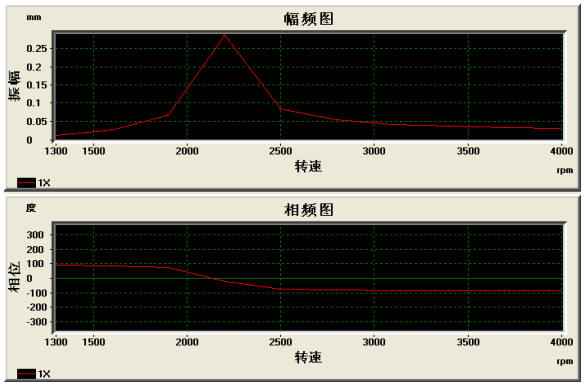



图 2.15 Bode 图

## 2.3 试验测试

### 2.3.1 转子试验台

利用 ZT-3 试验器搭建如图 2.16 所示的试验台，它为两支承三盘结构，此外端部还有一个集中质量，也可近似认为转动惯量很小的盘结构，图 2.17 为其结构图。共布置五个测点来测量盘轴的水平方向位移，如图 2.18 所示，其中测点 1 和测点 5 测轴相对位移，测点 2、3、4 分别测三个盘的位移，根据各测点测得位移可以得到临界转速和对应振型。光电传感器布置在联轴节位置，测转子转速。

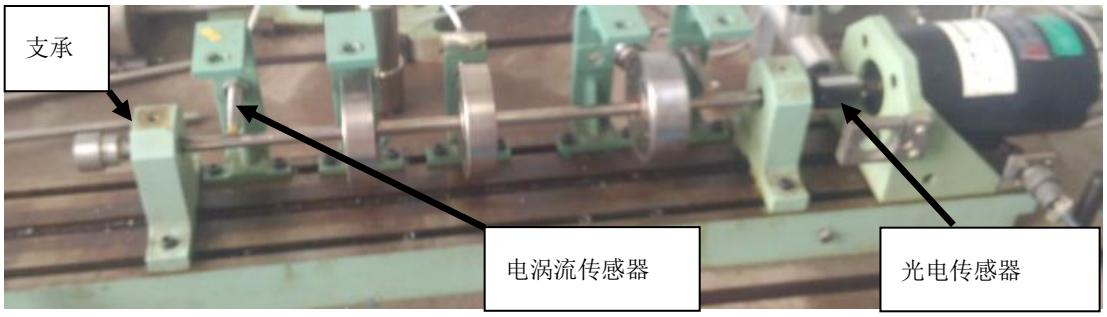



图 2.16 实际计算转子图

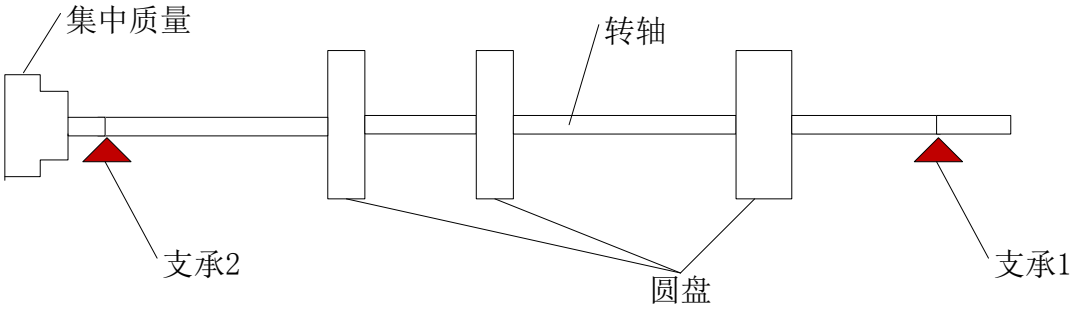



图 2.17 转子模型图

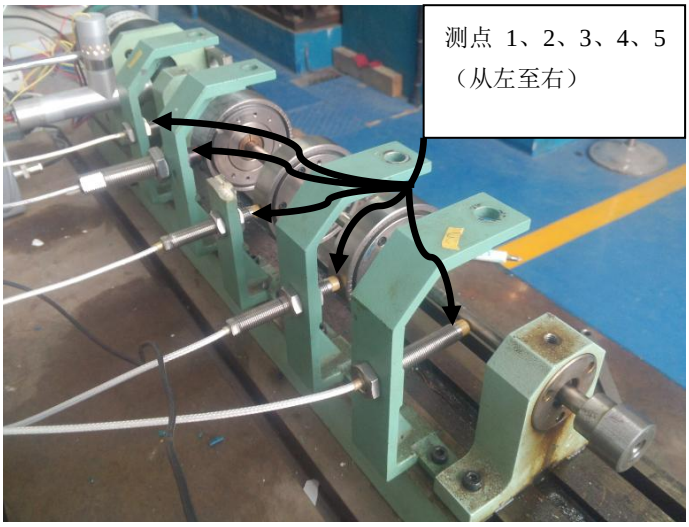



图 2.18 电涡流传感器测点分布图

### 2.3.2 支承刚度测量实验

实际转子系统是一个转子-支承系统，支承刚度对临界转速有明显的影响，准确预测其刚

度值对于实际转子系统的临界转速计算及其重要。实际上，支承往往是一个弹簧-阻尼系统，其支承刚度随激振频率的不同而发生变化，要准确描述这种变化，应该采用动刚度，通常，通过动刚度实验可以获取支承系统的动刚度。由于本文研究重点不在此，而且采用静刚度引起的误差通常在可接受的范围内，因此本文的计算均采用静刚度值。支承的静刚度大小可以通过动刚度实验得到的动刚度曲线取其低频段得到。

（1）动刚度实验原理及实验仪器

转子系统支承如图 2.19 所示，实验采用力锤击法，用力传感器测量激励力大小，加速度传感器测量加速度响应，力锤和加速度传感器分别如图 2.20 和 2.21 所示，产生的力和响应信号通过 NI-USB9234 采集卡采集到 PC 机上，图 2.22 为 NI-USB9234 数据采集卡，然后根据得到的力和响应信号得到频响函数，从而得到测点间的支承动刚度。其测量原理图如图 2.23 所示。

图 2.19 支承结构

图 2.20 30927 型力锤

图 2.21 B&K4508 加速度传感器

图 2.22 NIUSB-9234 采集卡

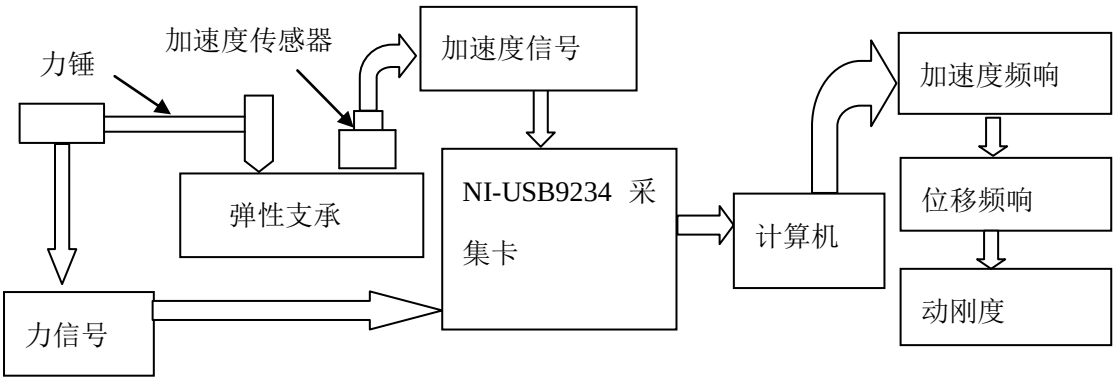



图 2. 23 支承刚度测试原理图

（2）动刚度测试过程

对于图 2.19 所示的支承，主要是得到水平和垂直两个方向刚度。对于水平方向刚度，敲击 1 点，并得到 1 点频响，从而可以得到水平方向动刚度；同理垂直方向上敲击 2 点，得到 2 点频响从而得到垂直方向动刚度，如图 2.24 所示。实验得到的水平和垂直方向的动刚度曲线如图 2.25 所示，观察动刚度曲线，发现水平和垂直方向刚度在低频段相差并不大，在同一数量级内，可认为近似相等。静刚度值取其低频段（小于 100 $Hz$），约为 1e6 $N/m$。

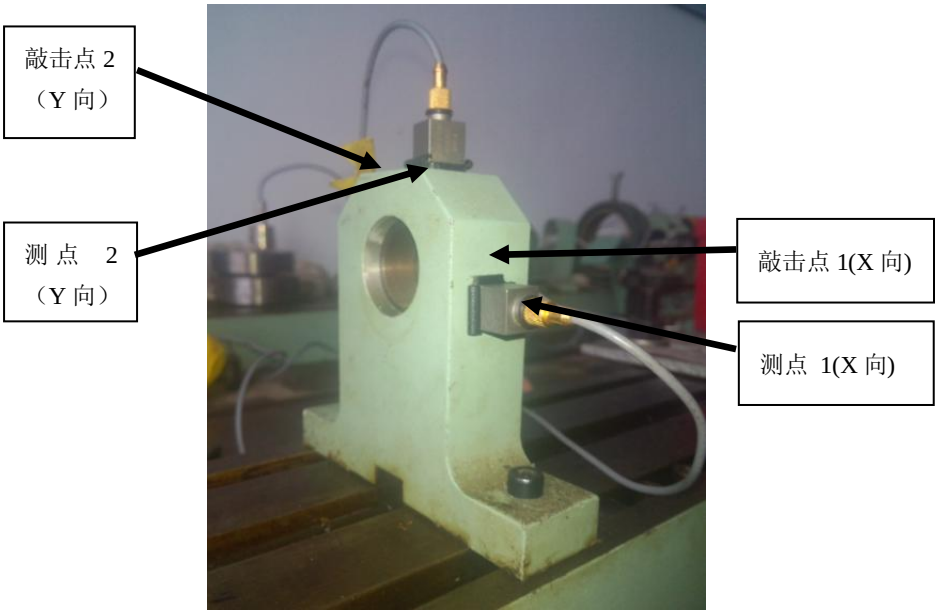



图 2. 24 动刚度测点示意图

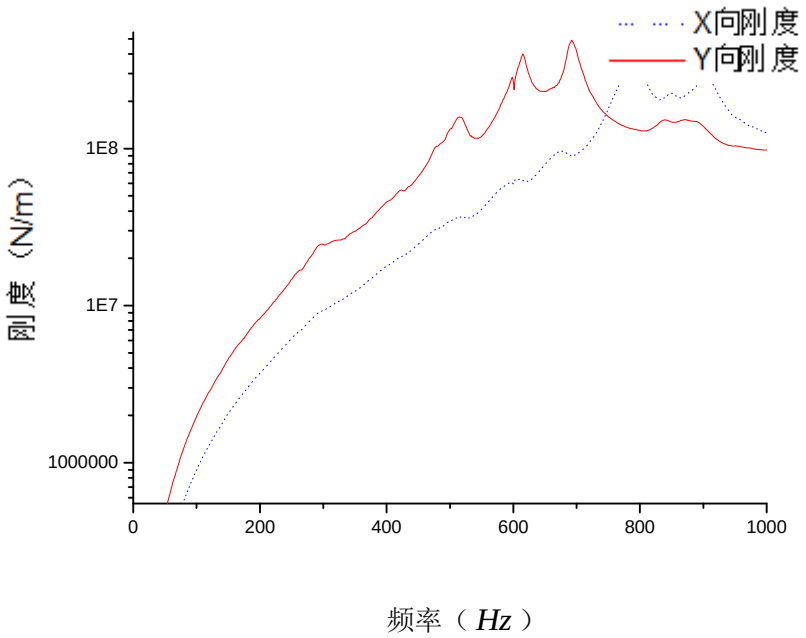



图 2.25 支承动刚度曲线

### 2.3.3 临界转速测量实验

在转子制造和装配过程中，不可避免地存在不平衡质量。当转子旋转时，这些固有的不平衡质量将会产生周期性的激振力作用在转子上，使转子发生受迫振动。众所周知，激振力频率与转子转动频率相等。当激振力频率与转子系统转动条件下的自振频率相接近时，转子便会发生共振，此转速就称为转子临界转速。它在实际运行中的具体表现是：在这些特定的转速下运转时，转子会发生剧烈振动，而当转速偏离这些特定转速一定范围后，旋转又趋于平稳[9]。

前面已经对转子临界转速测试方法以及测试系统进行了叙述，本文采用振幅峰值法对所搭建的转子模型进行临界转速的测试。其操作步骤如下：

1）开启电源，打开调速器、光电传感器以及电机开关；

2）打开软件，设置好各个通道配置，进入采集界面，开始采集数据，并点击连续保存；

3）启动电机，缓慢旋转调速器使转速由 0 升至 8000r/min,结束保存，停止采集，关闭电机；

4）用该软件对采集保存的数据进行再现处理，画出其伯德图,并再次将数据导出，利用 origin 软件处理数据。

如图 2.26 为测点 1 至 5 的 bode 图，其中第一个峰值出现在约 1840r/min（30.7Hz）附近，这对应的是转子系统的第一阶临界转速；第二个峰值出现在 7310r/min（121.85Hz）附近，这对应的是转子系统的第二阶临界转速。同时，由 bode 图还可看出，在二阶临界转速时，测点 3 的振幅近似为零，说明在二阶时测点 3 位置为节点，这从其二阶振型图中也可以看出。由此可知，采用振幅峰值法测量临界转速时，若测点恰好选择在某一阶临界转速的振型节点位置，则此时不能通过此测点得出这一阶临界转速，造成某一阶临界转速的遗漏。因此，有必要布置多个测点，并相互比较从而得出结果。根据这个五个测点的位移情况，可以得到前两阶振型，如图 2.27 和 2.28 所示。

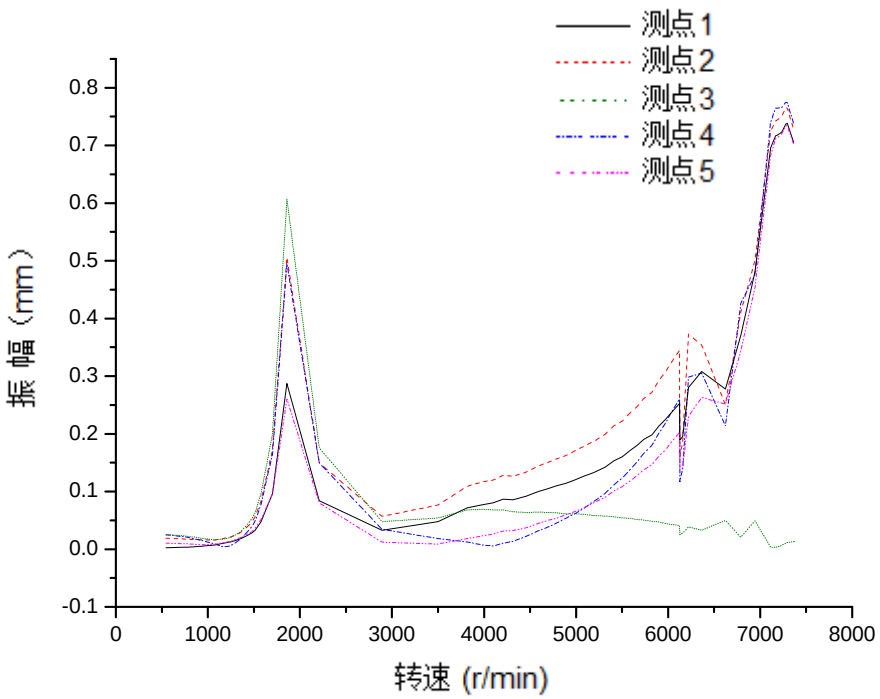



图 2.26 测点 bode 图

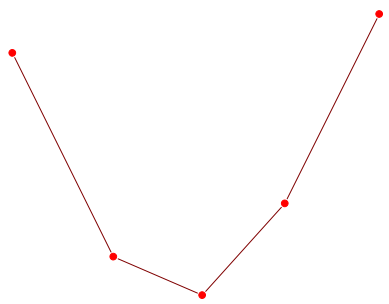


图 2.27 一阶振型

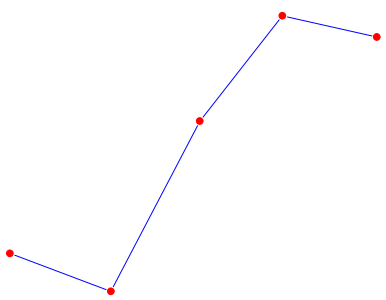


图 2.28 二阶振型

## 2.4 本章小结

本章首先介绍了临界转速理论，引入临界转速概念，并且对转子临界转速的测量方法进行了概括总结，然后对转子实验设备以及测试系统进行详细介绍，最后利用 ZT-3 搭建实际转子试验台，通过实验获取此转子试验台的实际临界转速和振型，为后续实验结果的验证提供基础。

# 第三章 基于传递矩阵法的临界转速分析

旋转机械转子系统的临界转速计算方法主要分为传递矩阵法和有限元法，传递矩阵法程序简单，所需要的贮存单元少。在上一章中已经搭建了 ZT-3 转子试验台，并测试出了临界转速，因此，采用传递矩阵法求解实际转子实验台的临界转速是本章的主要内容。

## 3.1 计算模型建立

CATIA 是法国达索公司的产品。作为 PLM 协同解决方案的一个重要组成部分，它可以帮助制造厂商设计他们未来的产品，并支持从项目前阶段、具体的设计、分析、模拟、组装到维护在内的全部工业设计流程。

根据实际测量的转轴各段长度、内外直径和圆盘内外直径以及厚度，在 CATIA 软件中建立起各个零件的三维模型，并进行组装，模型如图 3.1。然后应用 CATIA 软件中的测量功能测出圆盘的极转动惯量、直径转动惯量以及质量，测量示意图如 3.2 所示。得到的四个盘结的参数如表 3.1 所示。同时应用上章中得到的支承静刚度，建立它的计算模型，如图 3.3 所示。其中，支承位置取支承结构的中间位置，以弹簧单元替代。轴段各个参数如表 3.2 所示。

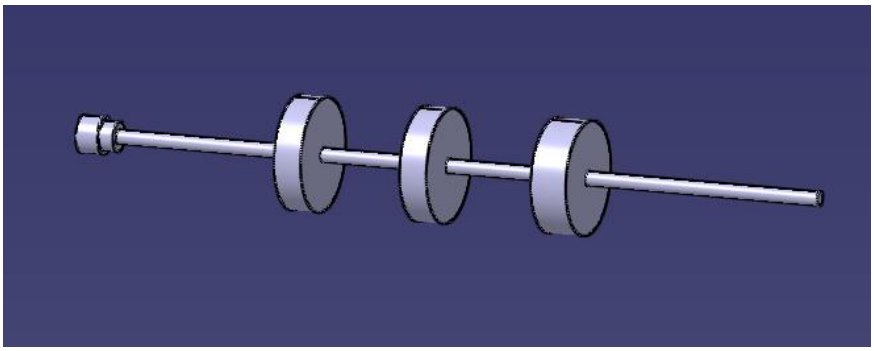


图 3.1 转子三维模型图

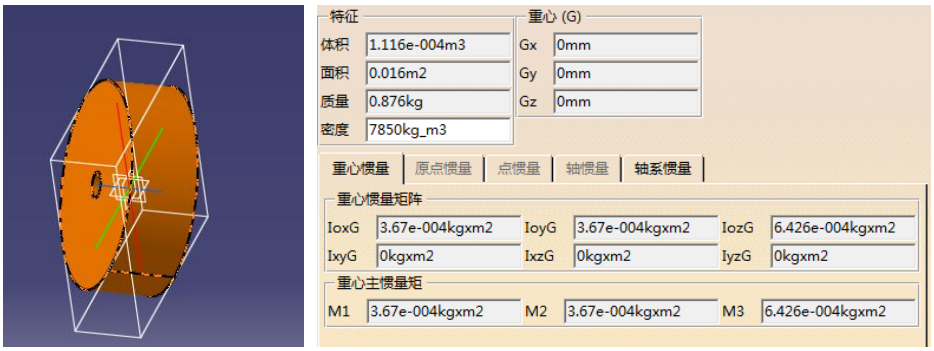



图 3.2　测量及结果示意图

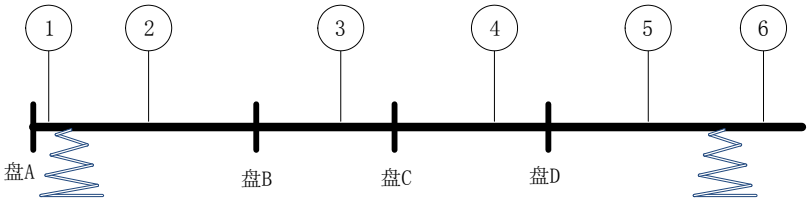



图 3.3 计算模型图

表 3.1 轮盘各参数列表

| 圆盘编号 | 质量（$kg$） | 极转动惯量（$kg*m^2$） | 直径转动惯量（$kg*m^2$） |
|---|---|---|---|
| A | 0.071 | 5.77e-7 | 1.532e-5 |
| B | 0.666 | 4.88e-4 | 2.642e-4 |
| C | 0.666 | 4.88e-4 | 2.642e-4 |
| D | 0.876 | 6.43e-4 | 3.67e-4 |

表 3.2 轴段参数列表

| 编号 | 长度/m | 内径/m | 外径/m |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.0495 | 0 | 0.0095 |
| 2 | 0.113 | 0 | 0.0095 |
| 3 | 0.09 | 0 | 0.0095 |
| 4 | 0.097 | 0 | 0.0095 |
| 5 | 0.1125 | 0 | 0.0095 |
| 6 | 0.0375 | 0 | 0.0095 |

另外，材料参数如下：

密度：7850 $kg/m^3$；弹性模量：2.1e11 $Pa$；泊松比：0.269。

各支承参数根据上述取：1e6 $N/m$。无联轴器。

采用传递矩阵法进行临界转速计算时，还要进一步将上述计算模型简化成集总质量模型。

## 3.2 基于传递矩阵法的临界转速分析

### 3.2.1 转子质量的离散化

实际转子是一个质量连续分布的弹性系统，其自由度共有无穷多个，在转子动力学中采用传递矩阵法求解临界转速时，经常将转子简化成含有若干集总质量的多自由度系统。也就是说，沿轴线将转子质量和它的转动惯量集总到若干个结点上，这些结点通常选在轴颈中心、轮盘、联轴器、轴端部以及轴的截面有突变的地方，同时根据顺序依次编号。如果转子存在变截面轴段，由于它的传递矩阵极其复杂，仅仅一些简单截面变化规律的轴段如锥形段才能导出其传递矩阵，故此时需要将它简化成等截面轴。

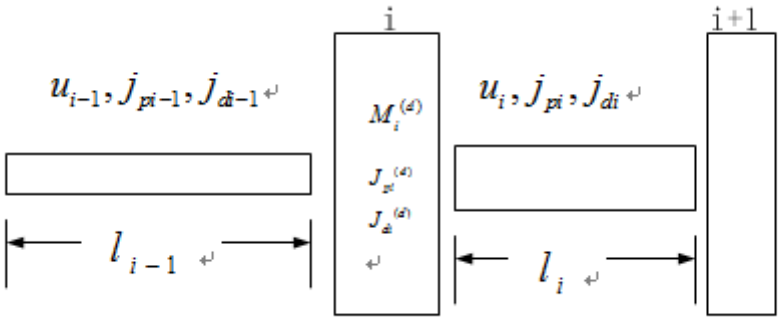



图 3.4　盘轴示意图

根据上述结点选取规则可知，结点间轴段通常为等截面轴，此时质量以及转动惯量的集总如下（图 3.4）：

$$
\begin{aligned}
M_i &= M_i^d + \frac{1}{2}(ul)_{i-1} + \frac{1}{2}(ul)_i \\
J_{pi} &= J_{pi}^d + \frac{1}{2}(j_p l)_{i-1} + \frac{1}{2}(j_p l)_i \\
J_{di} &= J_{di}^d + (\frac{1}{2} j_d l - \frac{1}{12} ul^3)_{i-1} + (\frac{1}{2} j_d l - \frac{1}{12} ul^3)_i
\end{aligned}
\tag{3-1}
$$

其中，$M_i$、$J_{pi}$和 $J_{di}$分别简化到结点$i$处的质量、极转动惯量和直径转动惯量。$M_i^d$、$J_{pi}^d$和$J_{di}^d$分别为原位于结点$i$处圆盘的质量、极转动惯量和直径转动惯量。$u$、$j_p$、$j_d$和$l$分别为对应轴段单位长度的质量、极转动惯量、直径转动惯量和长度。$(ul)_i$即是$u_i l_i$，其它类推。

根据转子离散化规则，转子系统可以离散成如图 3.5 所示的通用转子离散模型图。集总化后有 N 个典型构件，N+1 个截面，最后一个典型构件的轴长度是 0。

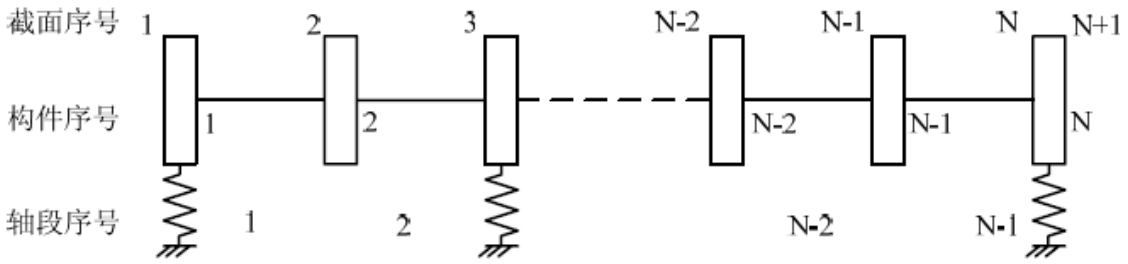



图 3.5 转子离散模型简图

### 3.2.2 分段原则

建立准确的计算模型、合理的分段是保证计算结果与实际结果一致的重要前提。如果分段过于细化，这样一方面使计算工作量大大增加，同时有可能由于积累误差的增加，造成所得结果不准确；如果分段过粗，计算结果就会与实际相差太大。因此必须保证分段合理，一般而言在划分轴段以及设站应时应遵照以下原则：

转子系统中具有较大的质量处，比如叶盘等，应当设站；

联轴器本身具有一定质量，而且对于不同的联轴器其抗弯特性也有所不同，因此应设站；

支承位置处，无论是弹性支承还是刚性绞支，均会给转子施加一定约束，使得横截面状态参数发生变化，应设站；

转轴的横截面发生较大突变处，此时轴段不能保证均匀轴段或者无质量弹性轴的特性参数不发生变化，应该进行分段并且设站；

相对细长的等截面弹性轴段，为保证模型准确性，应该适当分段，各分段轴段之间设为集中质量站。

### 3.2.3 典型部件的传递矩阵

当轴承为各向同性时，如果忽略阻尼影响，对于轴对称转子，在模态振动中，它的轴线将会弯曲成一平面曲线，轴线上各点涡动轨迹为圆形。现在假设转子在 $yos$ 平面内振动，对于第 $i$ 个部件，如果其左右两端的截面编号分别是 $i$ 和 $i+1$，则由截面 $i$ 的挠度 $y_i$，斜率 $\theta_i$，弯矩 $M_i$ 以及剪力 $Q_i$ 所组成的阵列，称作该截面的状态向量 $\{z\}_i$。即：

$$\{z\}_i = [y, \theta, M, Q]_i^T \tag{3-2}$$

任何一个部件其两端截面的状态向量总是存在一定关系，以下式描述：

$$\{z\}_{i+1} = [T]_i \{z\}_i \tag{3-3}$$

$[T]_i$ 称作此部件的传递矩阵。方阵中的元素可以通过作用在此部件上的外力与其运动以及变形关系求出。

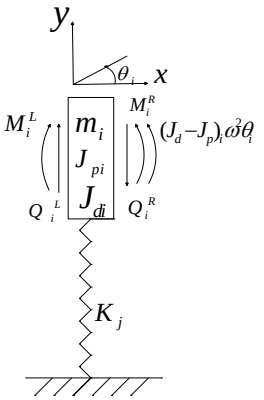



图 3.6 轮盘-弹簧结构

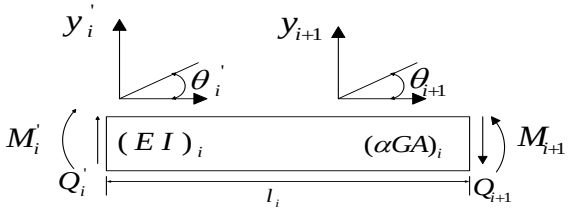



图 3.7 弹性轴段

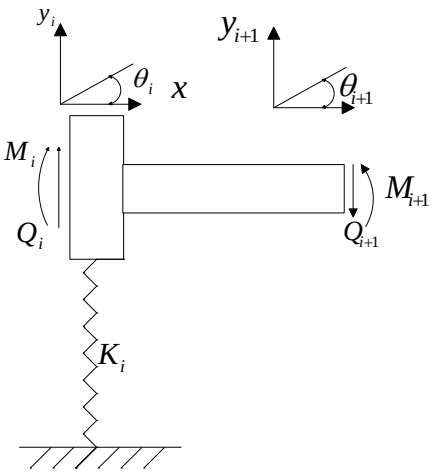



图 3.8 盘-弹簧-轴段部件

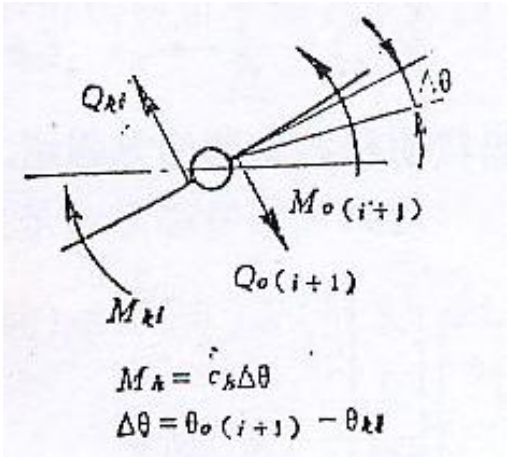



图 3.9 弹性铰链

（1）具有弹性支承的刚性圆盘

图 3.6 为支承于弹性支承之上的刚性圆盘，支承总刚度系数以 $K_j$ 表示。圆盘左右两截面的剪力和弯矩分别以 $Q_i^L$ 、$Q_i^R$ 、$M_i^L$ 和 $M_i^R$ 表示，当转子以角速度 $\omega$ 作同步正进动时，圆盘惯性力及其惯性力矩分别是 $m_i\omega^2 y_i$ 和 $(J_d - J_p)_i\omega^2\theta_i$ 。根据达朗贝尔原理得：

$$\left.\begin{aligned} Q_i^R &= Q_i^L + m_i\omega^2 y_i - K_j y_i \\ M_i^R &= M_i^L - (J_d - J_p)_i\omega^2\theta_i \end{aligned}\right\} \tag{3-4}$$

同时且有：

$$\left.\begin{aligned} \theta_i^R &= \theta_i^L = \theta_i \\ y_i^R &= y_i^L = y_i \end{aligned}\right\} \tag{3-5}$$

如果以矩阵的形式表示为：

$$\{z\}_i^R = [D]_i \{z\}_i^L \tag{3-6}$$

其中，$[D]_i$ 就是刚性圆盘的传递矩阵，也就是：

$$[D]_i = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & (J_p - J_d)\omega^2 & 1 & 0 \\ m\omega^2 - K_j & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}_i \tag{3-7}$$

(2)无质量等截面弹性轴

弹性轴如图 3.7 所示，设该轴段编号为$i$，两端截面编号分别为$i$及$i+1$，如将剪切变形影响考虑在内，则根据力平衡条件以及变形条件可知，该轴段两端截面的状态向量间可用如下式表示：

$$\{z\}_{i+1}=[B]_i\{z\}_i^{'} \tag{3-8}$$

其中，$[B]_i$为轴段的传递矩阵，即：

$$[B]_i=\begin{pmatrix} 1 & l & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI}(1-v) \\ 0 & 1 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3-9}$$

(3)圆盘与轴段组合部件的传递矩阵：

为了节省计算时间，刚性圆盘以及弹性轴段可以组合成图 3.8 所示的部件，因为$\{z\}_i^{'}=\{z\}_i^R;\{z\}_i=\{z\}_i^L$，故由（3-3）以及（3-8）式得到：

$$\{z\}_{i+1}=[B]_i\{z\}_i^{'}=[B]_i[D]_i\{z\}_i=[T]_i\{z\}_i \tag{3-10}$$

$$[T]_i=[B]_i[D]_i=\begin{pmatrix} 1+\frac{l^3}{6EI}(1-v)(m\omega^2-K_j) & l+\frac{l^2}{2EI}(J_p-J_d)\omega^2 & \frac{l^2}{2EI} & \frac{l^3}{6EI}(1-v) \\ \frac{l^2}{2EI}(m\omega^2-K_j) & 1+\frac{l}{EI}(J_p-J_d)\omega^2 & \frac{l}{EI} & \frac{l^2}{2EI} \\ l(m\omega^2-K_j) & (J_p-J_d)\omega^2 & 1 & l \\ (m\omega^2-K_j) & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3-11}$$

可以看出，传递矩阵中的各元素与涡动频率$\omega$有关。如果该部件没有弹性支承或者不计剪切变形的影响，或者不考虑圆盘的转动惯量、以及陀螺力矩，则在上式中可以分别令$K_j, v, J_d$以及$J_p$为零即可。

（4）弹性铰链的传递矩阵

如图 3.9 所示为弹性铰链结构单元的简图，用它来模拟联轴器（忽略联轴器径向刚度，只考虑角刚度）。其传递矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dfrac{1}{c_h} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{3-12}$$

其中，$c_h$ 为弹性铰链的力矩刚性系数。如果弹性铰链的抗弯刚度很大，则由于 $1/c_h \to 0$，铰链两侧轴段可以近似看作一体，如同不存在弹性铰链。如果弹性铰链抗弯刚度很小，则 $1/c_h \to \infty$，传递矩阵变为奇异，弹性铰链变为活动球铰。实际是，当 $c_h$ 比较小时，$1/c_h$ 就已经相当大了，这时候会引起矩阵运算时出现数值失稳。此时，参数传递中断，应作为边界条件处理。

### 3.2.4 传递矩阵法求解临界转速原理

如图 3.5 所示的转子系统。根据式（3-10）可知：

$$\left.\begin{aligned} &\{z\}_2 = [T]_1\{z\}_1 \\ &\{z\}_3 = [T]_2\{z\}_2 = [T]_2[T]_1\{z\}_1 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\{z\}_i = [T]_{i-1}\{z\}_{i-1} = [T]_{i-1}[T]_{i-2}\cdots[T]_1\{z\}_1 = [A]_{i-1}\{z\}_1 \end{aligned}\right\} \tag{3-13}$$

其中：

$$[A]_{i-1} = [T]_{i-1}[T]_{i-2}\cdots[T]_1 \tag{3-14}$$

其中，$i = 2,3,\cdots,N+1$。式（3-14）表达了转子系统各截面的状态向量与起始截面状态向量之间的关系。也就是说各截面状态向量中的元素都可以表示为起始截面状态向量中各元素的线性组合。因此当起始各截面状态向量已知时，通过式（3-14）的递推关系，就可以得到各截面的状态向量。

对于图 3.5 所示模型，由边界条件：

$$M_1 = 0; Q_1 = 0 \tag{3-15}$$

因此，对于任何一个截面 $i(i = 2,3,\cdots,N+1)$，由式（3-13）得到：

$$\{z\}_i=[A]_{i-1}\{z\}_1=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}_{i-1}\begin{pmatrix} y \\ \theta \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}_{i-1}\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}_1 \tag{3-16}$$

对于最末端的截面$N+1$，由式（3-16）可知：

$$\begin{pmatrix} M \\ Q \end{pmatrix}_{N+1}=\begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{bmatrix}_N\begin{pmatrix} y \\ \theta \end{pmatrix}_1 \tag{3-17}$$

同时末端截面$N+1$的边界条件是：

$$\begin{cases} M_{N+1}=0 \\ Q_{N+1}=0 \end{cases} \tag{3-18}$$

我们称：

$$\Delta\left(\omega^2\right)=\begin{vmatrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{vmatrix}_N \tag{3-19}$$

为 prohl 剩余量。根据式（3-17）可知，当边界条件（3-18）满足时，这一齐次方程式存在解的条件为剩余量等于零，也就是：

$$\Delta\left(\omega^2\right)=0 \tag{3-20}$$

式（3-20）即为转子系统的频率方程。为此在我们所感兴趣的转速范围内，根据一定的步长选定$\omega$，$\omega+\Delta\omega,\omega+2\Delta\omega,\cdots$作为试算频率。然后根据矩阵连乘的（3-14）式以及剩余量公式（3-19），就可以求得与上述各个试算频率相对应的剩余量$\Delta\left(\omega^2\right)$。如果对应的相邻的两个试算频率的$\Delta\left(\omega^2\right)$异号，则说明在这两个试算频率之间，必有一个使$\Delta\left(\omega^2\right)=0$的频率存在，此频率就是转子的一个同步正向涡动角速度或者临界角速度。因此在剩余量产生变号的对应$\omega$范围内，再用二分法进行仔细搜索，就可以通过逐渐逼近的方式解出此临界转速。若以$\omega$为横坐标，$\Delta\left(\omega^2\right)$为纵坐标，在每一次进行试算的过程中，都可以在此坐标系内求出一个点，

将这些求出的点连接起来便可得到如图 3.9 所示的曲线。转子的各阶临界转速就是这些曲线同横坐标轴的交点所对应的转速。

当某阶临界转速求出来以后，由（3-16）式得：

$$\begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}_{i-1} \begin{Bmatrix} y \\ \theta \end{Bmatrix}_1 \tag{3-21}$$

其中，$i = 2,3,\cdots N$，由此可以求得各截面的 $y$ 与 $\theta$ 的比例解，也就是对应于该阶临界转速的模态振型。

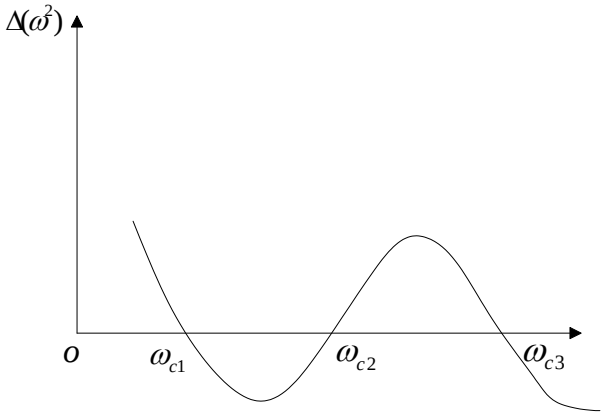



图 3.9 余量图

## 3.3 基于 MATLAB 软件的传递矩阵法编程

转子系统通常是由多个转子通过联轴器组合而成。本文编程的对象是多个弹簧、盘轴组合部件通过联轴器连接的转子系统，主要是运用 MATLAB 的函数文件以及 GUI 实现临界转速的求解。实际计算时只需输入转子系统各个对应参数即可求得临界转速，具有很友好的人机交互性。

### 3.3.1 MATLAB 简介

MATLAB 是由美国 mathworks 公司发布的主要面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算环境。它将数值分析、矩阵计算、科学数据可视化以及非线性动态系统的建

模和仿真等诸多强大功能集成在一个便于使用的视窗环境中，为工程设计、科学研究以及需要进行有效数值求解的众多领域提供了一种较为全面完整的解决方案，并且在很大的程度上摆脱了传统非交互程序设计语言（诸如 C 语言、Fortran 语言）的编辑方式，代表了当前国际上科学计算软件的先进水平。

采用 MATLAB 编写程序完成某一任务，通常需要编写 M 文件，M 文件分为脚本文件和函数文件，函数文件犹如一个“黑箱”，从外界只能看到传给它的输入量和送出来的计算结果，内部运作是藏而不见的。通过 MATLAB，还可以完成图形用户界面 GUI 的制作，用户界面是用户与计算机进行信息交流的方式采用 MATLAB 的 GUI，用户可以根据自己需要定制用户与 MATLAB 的交互方式，从而实现友好的人机交互。

### 3.3.2 基于 MATLAB 的编程

本文中采用 M 函数文件编写传递矩阵法的功能函数，如形成转子系统的传递矩阵、二分法求临界转速、绘制余量图以及振型图等功能， 然后采用 MATLAB 的 GUI 界面实现计算转子的参数输入、存储以及结果的显示，各个功能函数在 GUI 的控件的回调函数中被调用，从而完成临界转速的求解。如图为 3.10 为参数输入界面，首次进入界面后首先输入参数，在参数显示区可以观察到所输入的参数，参数输入完毕后可以点击“保存”按钮将转子的各个参数保存成 txt 文件，以便下次进入界面后可供用户选择，直接将参数导入，从而省去再次输入参数的麻烦，点击“绘制”按钮可以显示转子模型图，在模型图中可以清楚的看出盘轴、支承以及联轴器位置分布，更加直观。 当参数输入完毕后，便可以进行临界转速求解，点击“临界转速求解”菜单，弹出子菜单，子菜单包括“有限元法”和“传递矩阵法”求解，点击“传递矩阵法”便可以完成临界转速的求解，得到转子模型的余量图、临界转速以及振型图，“有限元法”编程原理将在后面章节中予以介绍。

采用传递矩阵法求解临界转速，内部主要的运行过程可以用图 3.11 所示的流程图来表示：

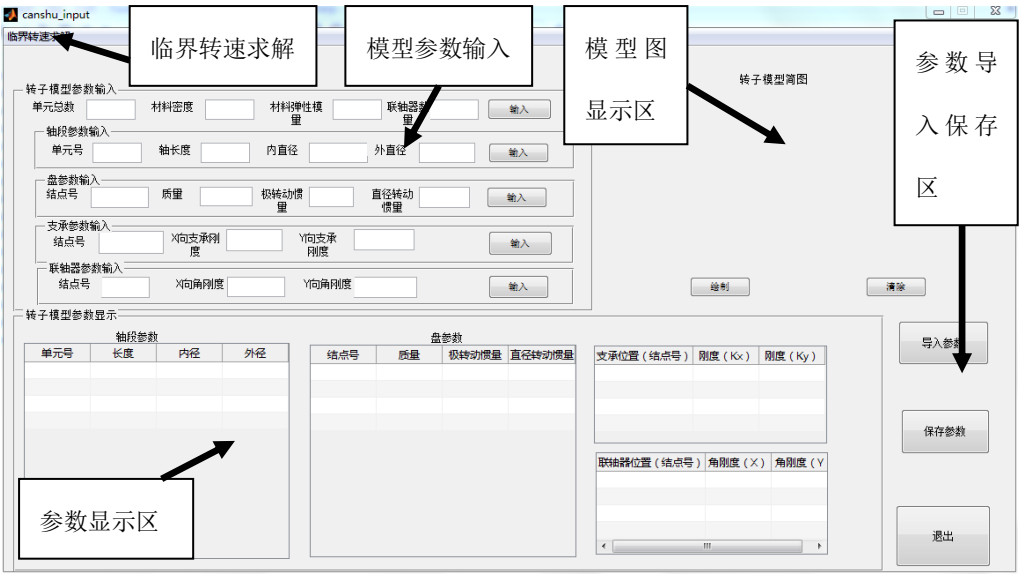



图 3.10 参数输入界面

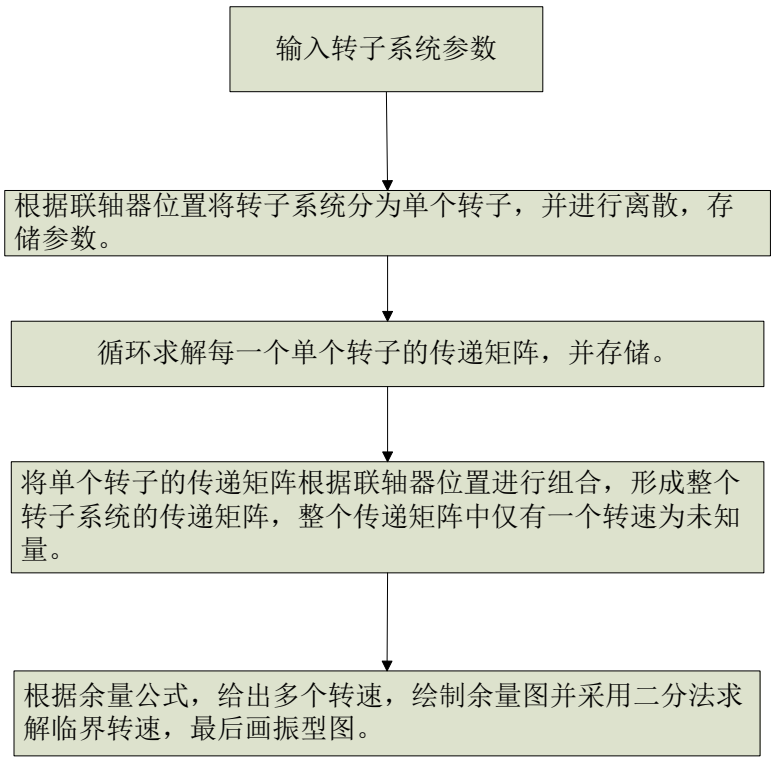



图 3.11 传递矩阵法编程流程图示

## 3.4 临界转速计算分析

进入临界转速求解的主界面，根据 3.2 小节中的计算模型，输入转子模型的参数，并保存，同时绘制模型图，如图 3.12 所示，然后点击临界转速求解，选择传递矩阵法得到结果。图 3.13 为求解的余量图，由图可知，在角速度大于零的范围内，余量为零的点有两个。实际上，对于如图 2.7 所示转子系统，临界转速不只两个，但由于实验条件限制，只能实验得到前两阶临界转速，所以求解时仅给出前两阶临界转速，其中，求出的第一阶临界转速为 29.28Hz，第二阶临界转速为 116.76Hz。图 3.13 和 3.14 分别为求出的第一二阶振型图，对比试验结果可知，传递矩阵法求出的临界转速与实际相差不大，振型图也能很好的与实验结果相吻合。

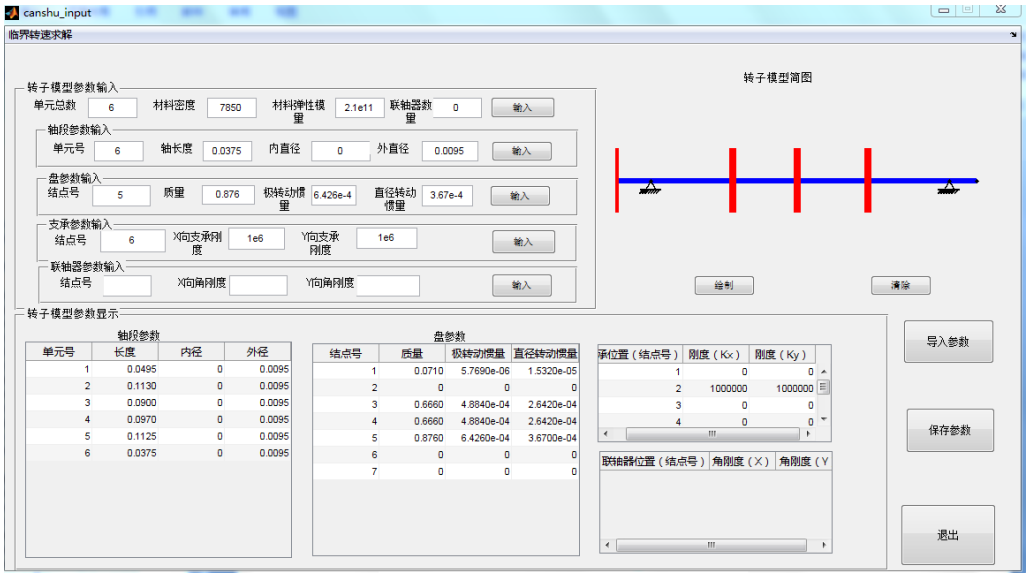



图 3. 12 输入参数显示图

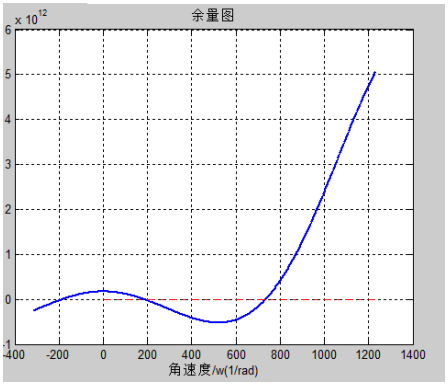
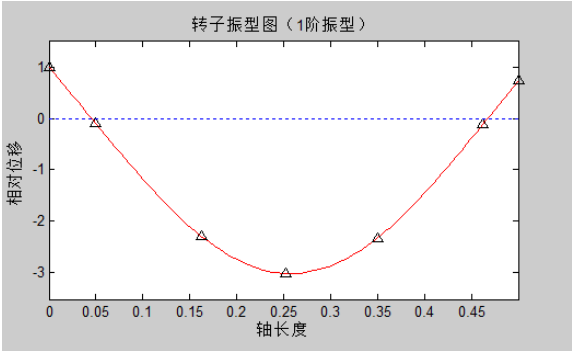
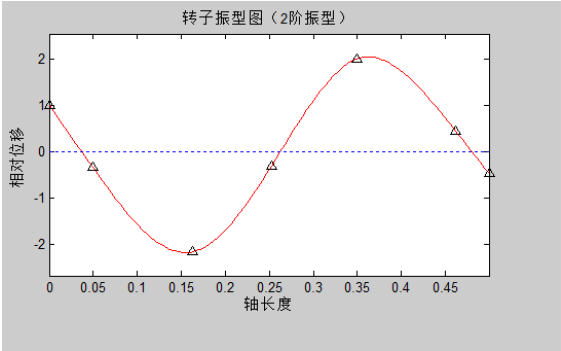



图 3. 13 余量图




3.14 一阶振型图




3.15 二阶振型图

## 3.5 本章小节

本章首先针对第二章搭建的实际转子模型，在 CATIA 软件中建立三维模型，并根据 CATIA 软件中的测量功能得到典型部件的物理参数如圆盘质量、转动惯量等，建立其计算模型；然后介绍了 prohl 传递矩阵法的基本原理以及重要典型部件的传递矩阵；最后，基于 MATLAB 数学软件编写传递矩阵法求解临界转速的通用程序，采用 MATLAB 的 GUI 实现参数输入，输入模型参数，对模型进行计算。计算结果表明传递矩阵法可以很好的求解出实际转子的低阶临界转速。

# 第四章 基于有限元法的临界转速分析

有限元法是近几十年来发展起来的一种通用有效的计算方法，相比于传递矩阵法而言，有限元法法可以很好的解决传递矩阵法的数值不稳定以及漏根现象，同时又可以保证模型的完整性，分析结果更加精确。采用有限元法求解，可以考虑采用不同的单元，实体单元可以更加精确详细的描述实际模型，但计算规模大，编程也更加复杂；梁单元模型计算规模小，还可以考虑陀螺力矩、剪切变形等因素，同时编程简单。本章采用梁单元法编写计算转子临界转速的 MATLAB 通用程序。

## 4.1 有限元建模原理

转子考虑为由若干个轮盘和支承组成，利用有限元法将转子离散成普通梁单元，得到转子系统的刚度矩阵、陀螺矩阵以及质量矩阵，建立其运动学方程，求解出临界转速和振型。

### 4.1.1 单元的运动学方程

组成转子-轴承系统的单元有刚性圆盘、轴段和轴承座等，每种单元的运动方程叙述如下：

（1）刚性圆盘

设刚性圆盘质量，过轴心的极转动惯量以及直径转动惯量分别为$m$、$J_p$和$J_d$。圆盘的广义坐标就是其轴心结点的位移向量$\{u_{1d}\}=[x,\theta_y]^T$和$\{u_{2d}\}=[y,-\theta_x]^T$。设圆盘轴心与重心重合。根据拉格朗日方程可得：

$$\left.\begin{aligned}[M_d]\{\ddot{u}_{1d}\}+\Omega[J]\{\dot{u}_{2d}\}=\{Q_{1d}\}\\ [M_d]\{\ddot{u}_{2d}\}-\Omega[J]\{\dot{u}_{1d}\}=\{Q_{2d}\}\end{aligned}\right\} \tag{4-1}$$

这就是刚性圆盘的运动微分方程，其中$[M_d]$为圆盘的质量矩阵，$[G_d]=\Omega[J]$为圆盘的回转矩阵，$[M_d]=\begin{bmatrix}m & 0\\ 0 & J_d\end{bmatrix};[J]=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & J_p\end{bmatrix}$。$\{Q_{1d}\}$和$\{Q_{2d}\}$为相应的广义力。

（2）弹性轴段

图 4.1 为一弹性轴段单元，该单元的广义坐标是两端结点的位移：

$$\left.\begin{aligned}\{u_{1s}\}&=\left[x_A,\theta_{yA},x_B,\theta_{yB}\right]^T\\ \{u_{2s}\}&=\left[y_A,-\theta_{xA},y_B,-\theta_{xB}\right]^T\end{aligned}\right\}\tag{4-2}$$

单元内任意截面的位移 $x,\theta_y,y,\theta_x$ 是位置 $s$ 和时间 $t$ 的函数，使用位移插值函数，还可用该单元的结点位移将将任意截面的位移表示出来，例如 $x(s,t)=[N]\{u_{1s}\}$，其中 $[N]$ 是待定的 $1\times4$ 阶的位移插值函数矩阵，即：

$$[N]=\left[N_1(s)\quad N_2(s)\quad N_3(s)\quad N_4(s)\right]\tag{4-3}$$

这样，

$$\left.\begin{aligned}x(s,t)&=N_1(s)x_A(t)+N_2(s)\theta_{yA}(t)+N_3(s)x_B(t)+N_4(s)\theta_{yB}(t)\\ \theta_y(s,t)&=\frac{\delta x}{\delta s}=N_1^{'}(s)x_A(t)+N_2^{'}(s)\theta_{yA}(t)+N_3^{'}(s)x_B(t)+N_4^{'}(s)\theta_{yB}(t)\end{aligned}\right\}\tag{4-4}$$

式中，“ ' ”表示函数对 $s$ 求导，轴段单元的端点条件为

$$\left.\begin{aligned}x(0,t)&=x_A(t);x(l,t)=x_B(t)\\ x^{'}(0,t)&=\theta_{yA}(t);x^{'}(l,t)=\theta_{yB}(t)\end{aligned}\right\}\tag{4-5}$$

由此可以得到各插值函数满足下式：

$$\left.\begin{matrix}N_1(0)=1 & N_1^{'}(0)=0 & N_1(l)=0 & N_1^{'}(l)=0\\ N_2(0)=0 & N_2^{'}(0)=1 & N_2(l)=0 & N_2^{'}(l)=0\\ N_3(0)=0 & N_3^{'}(0)=0 & N_3(l)=1 & N_3^{'}(l)=0\\ N_4(0)=0 & N_4^{'}(0)=0 & N_4(l)=0 & N_4^{'}(l)=1\end{matrix}\right\}\tag{4-6}$$

因为每一个插值函数均有四个端点条件，故每一个插值函数均可以假设成 $s$ 的三次多项式，例如：

$N_1(s)=a_0+a_1s+a_2s^2+a_3s^3$，根据上式条件，就可以求得每一个 $N_i(s)$ 的参数值（$i=1,2,3,4$），求得：

$$
\begin{aligned}
N_1(s) &= 1-3\left(\frac{s}{l}\right)^2+2\left(\frac{s}{l}\right)^3 \\
N_2(s) &= l\left[\frac{s}{l}-2\left(\frac{s}{l}\right)^2+\left(\frac{s}{l}\right)^3\right] \\
N_3(s) &= 3\left(\frac{s}{l}\right)^2-2\left(\frac{s}{l}\right)^3 \\
N_4(s) &= l\left[-\left(\frac{s}{l}\right)^2+\left(\frac{s}{l}\right)^3\right]
\end{aligned}
\tag{4-7}
$$

对于那些具有轴对称截面的轴段，同理有 $y(s,t)=[N]\{u_{2s}\}$，综合上述结果可以得到：

$$
\left.
\begin{aligned}
x &= [N]\{u_{1s}\};\theta_y=\frac{\delta x}{\delta s}=\left[N^{'}\right]\{u_{1s}\} \\
y &= [N]\{u_{2s}\};-\theta_x=\frac{\delta y}{\delta s}=\left[N^{'}\right]\{u_{2s}\}
\end{aligned}
\right\}
\tag{4-8}
$$

上式说明轴段单元内的任一截面处的位移均可用该单元的结点位移来表示，这样单元的动能 $T_s$ 以及弯曲弹性势能 $V_s$ 也就可以表示为结点位移和结点速度的函数。如在与结点 A 的轴向距离为 $s$ 处，截取厚度为 $ds$ 的微元，令 $u$、$j_p$ 和 $j_d$ 分别表示轴段单位长度的质量、极转动惯量以及直径转动惯量。于是该微元动能表示为：

$$
\begin{aligned}
dT_s &= \frac{1}{2}\{\dot{u}_{1s}\}^T\left(u[N]^T[N]+j_d\left[N^{'}\right]^T[N^{'}]\right)\{\dot{u}_{1s}\}ds+\frac{1}{2}\{\dot{u}_{2s}\}^T\left(u[N]^T[N]+j_d\left[N^{'}\right]^T[N^{'}]\right)\{\dot{u}_{2s}\}ds \\
&+j_p\Omega\{\dot{u}_{1s}\}^T\left[N^{'}\right]^T[N^{'}]\{u_{2s}\}ds+\frac{1}{2}j_p\Omega^2ds
\end{aligned}
\tag{4-9}
$$

微元弯曲弹性势能是：

$$
\begin{aligned}
dV_s &= \frac{1}{2}EI\begin{Bmatrix}x^{''}\\ y^{''}\end{Bmatrix}^T\begin{Bmatrix}x^{''}\\ y^{''}\end{Bmatrix}ds \\
&= \frac{1}{2}EI\left(\{u_{1s}\}^T\left[N^{''}\right]^T\left[N^{''}\right]\{u_{1s}\}+\{u_{2s}\}^T\left[N^{''}\right]^T\left[N^{''}\right]\{u_{2s}\}\right)ds
\end{aligned}
\tag{4-10}
$$

对于长为 $l$，半径为 $r$ 的圆截面轴，上两式沿单元全长积分，可以得到该单元的动能以及势能为：

$$T_s=\frac{1}{2}\{\dot{u}_{1s}\}^T\left([M_{sT}]+[M_{sR}]\right)\{\dot{u}_{1s}\}+\frac{1}{2}\{\dot{u}_{2s}\}^T\left([M_{sT}]+[M_{sR}]\right)\{\dot{u}_{2s}\}$$
$$+\Omega\{\dot{u}_{1s}\}^T[J_s]\{u_{2s}\}+\frac{1}{2}J_{ps}\Omega^2 \tag{4-11}$$

$$V_s=\frac{1}{2}\{u_{1s}\}^T[K_s]\{u_{1s}\}+\frac{1}{2}\{u_{2s}\}^T[K_s]\{u_{2s}\} \tag{4-12}$$

其中，$J_{ps}=j_{ps}l$，且

$$[M_{sT}]=\int_0^l u[N]^T[N]ds=\frac{ul}{420}\begin{pmatrix}156 & 22l & 54 & -13l\\ & 4l^2 & 13l & -3l^2\\ & & 156 & -22l\\ \text{对称} & & & 4l^2\end{pmatrix} \tag{4-13}$$

$$[M_{sR}]=\int_0^l j_d\left[N'\right]^T\left[N'\right]ds=\frac{ur^2}{120l}\begin{pmatrix}36 & 3l & -36 & 3l\\ & 4l^2 & -3l & -l^2\\ & & 36 & -3l\\ \text{对称} & & & 4l^2\end{pmatrix} \tag{4-14}$$

$$[J_s]=\int_0^l j_p\left[N'\right]^T\left[N'\right]ds=\frac{ur^2}{60l}\begin{pmatrix}36 & 3l & -36 & 3l\\ & 4l^2 & -3l & -l^2\\ & & 36 & -3l\\ \text{对称} & & & 4l^2\end{pmatrix}$$
$$=2[M_{sR}] \tag{4-15}$$

$$[K_s]=\int_0^l EI\left[N''\right]^T\left[N''\right]ds=\frac{EI}{l^3}\begin{pmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\ & 4l^2 & -6l & 2l^2\\ & & 12 & -6l\\ \text{对称} & & & 4l^2\end{pmatrix} \tag{4-16}$$

此处忽略剪切变形的影响。根据拉格朗日方程，可得轴段单元的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}[M_s]\{\ddot{u}_{1s}\}+\Omega[J_s]\{\dot{u}_{2s}\}+[K_s]\{u_{1s}\}=\{Q_{1s}\}\\ [M_s]\{\ddot{u}_{2s}\}-\Omega[J_s]\{\dot{u}_{1s}\}+[K_s]\{u_{2s}\}=\{Q_{2s}\}\end{aligned}\right\} \tag{4-17}$$

这里$[M_s]$为考虑转动惯性和移动惯性的一致质量矩阵，它为$[M_{sT}]$与$[M_{sR}]$之和。即：$[M_s]=[M_{sT}]+[M_{sR}]$。

当轴段的质量以及转动惯量集总到两端结点 A、B 时，此时质量矩阵为对角矩阵，我们

将此时的质量矩阵称为聚缩质量矩阵，也就是：

$$[M_{sT}]=\begin{pmatrix} m_A & & & 0 \\ & 0 & & \\ & & m_B & \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix};[M_{sR}]=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & J_{dA} & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & J_{dB} \end{pmatrix} \tag{4-18}$$

$$[M_s]=[M_{sT}]+[M_{sR}]=\begin{pmatrix} m_A & & & \\ & J_{dA} & & \\ & & m_B & \\ & & & J_{dB} \end{pmatrix};\ [J_s]=\begin{pmatrix} 0 & & & 0 \\ & J_{pA} & & \\ & & 0 & \\ 0 & & & J_{pB} \end{pmatrix} \tag{4-19}$$

其中，$m_A$、$m_B$、$J_{pA}$、$J_{pB}$、$J_{dA}$和$J_{dB}$分别是该轴段集总到结点 A、B 处的质量、极转动惯量和直径转动惯量。$\{Q_{1s}\}$和$\{Q_{2s}\}$为对应的广义力。

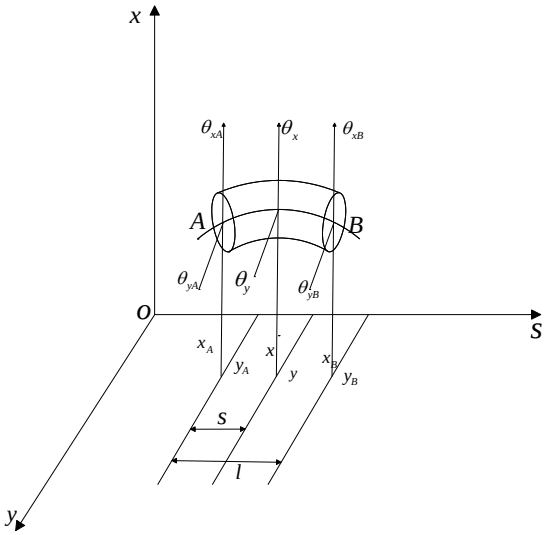



图 4.1 弹性轴段

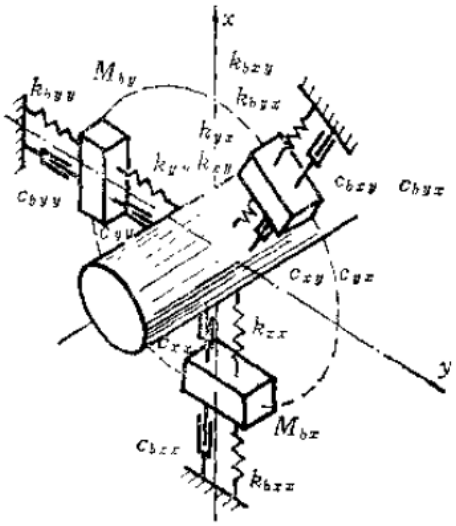



图 4.2 轴承模拟单元

（3）轴承

如轴承座简化成如图 4.2 所示的单元，轴承坐中心的坐标中心的坐标是$x_b$、$y_b$，对应轴颈中心结点的编号为$s(j)$，则轴颈中心的坐标为$x_{s(j)}$、$y_{s(j)}$。轴承座运动方程写为：

$$\begin{bmatrix} M_{bx} & 0 \\ 0 & M_{by} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \ddot{x}_b \\ \ddot{y}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_b-\dot{x}_{s(j)} \\ \dot{y}_b-\dot{y}_{s(j)} \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_b-x_{s(j)} \\ y_b-y_{s(j)} \end{Bmatrix}$$
$$+\begin{bmatrix} c_{bxx} & c_{bxy} \\ c_{byx} & c_{byy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_b \\ \dot{y}_b \end{Bmatrix}+\begin{bmatrix} k_{bxx} & k_{bxy} \\ k_{byx} & k_{byy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_b \\ y_b \end{Bmatrix}=\{0\} \tag{4-20}$$

如果基础刚性很好，于是又 $x_b=y_b=0$，则油膜作用于轴颈结点处的广义力为：

$$\begin{Bmatrix} Q_{1d}^b \\ Q_{2d}^b \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} c_{xx} & c_{xy} \\ c_{yx} & c_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \dot{x}_{s(j)} \\ \dot{y}_{s(j)} \end{Bmatrix}-\begin{bmatrix} k_{xx} & k_{xy} \\ k_{yx} & k_{yy} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_{s(j)} \\ y_{s(j)} \end{Bmatrix} \tag{4-21}$$

忽略阻尼影响，且支承可以简化为刚性系数分别是 $k_x$ 和 $k_y$ 的等刚度弹性支承时，则有：

$$\begin{Bmatrix} Q_{1d}^b \\ Q_{2d}^b \end{Bmatrix}=-\begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} x_{s(j)} \\ y_{s(j)} \end{Bmatrix} \tag{4-22}$$

实际计算时，可以通过动刚度实验近似获取支承的两个方向的静刚度或者动刚度值，即 $k_x$ 和 $k_y$。

（4）联轴器

对于转子与转子之间采用联轴器连接形成转子系统而言，设左端转子的第 $i$ 个节点与右端转子的第 $j$ 个节点用联轴器相连，联轴器的径向刚度为 $k_{Rr}$，角刚度为 $k_{R\alpha}$，忽略阻尼影响。设左端转子的第 $i$ 个节点位移为：$x_{RLi}$，$y_{RLi}$，$\phi_{RLi}$，$\varphi_{RLi}$；右端转子第 $j$ 个节点的位移为 $x_{RRj}$，$y_{RRj}$，$\phi_{RRj}$，$\varphi_{RRj}$。于是可以求出分别作用在左右转子上 $i$、$j$ 节点上的力和力矩，分别以 $F_{Rxi}$、$F_{Ryi}$、$M_{Rxi}$、$M_{Ryi}$ 以及 $F_{Rxj}$、$F_{Ryj}$、$M_{Rxj}$、$M_{Ryj}$ 表示，且为：

$$\left.\begin{aligned} F_{Rxi}&=k_{Rr}(x_{RRj}-x_{RLi}) \\ F_{Ryi}&=k_{Rr}(y_{RRj}-y_{RLi}) \\ M_{Rxi}&=k_{R\alpha}(\phi_{RRj}-\phi_{RLi}) \\ M_{Ryi}&=k_{R\alpha}(\varphi_{RRj}-\varphi_{RLi}) \end{aligned}\right\} \tag{4-23}$$

$$\left.\begin{aligned} F_{Rxj}&=-F_{Rxi} \\ F_{Ryj}&=-F_{Ryi} \\ M_{Rxj}&=-M_{Rxi} \\ M_{Ryj}&=-M_{Ryi} \end{aligned}\right\} \tag{4-24}$$

于是，联轴器的影响可以通过与类似支承的处理一样，通过作用在节点上的广义力来表示。倘若考虑联轴器径向刚度很大，可近似认为无穷大，此时，只需令左右节点的位移坐标相等，也就是合并位移自由度，即有：

$$\left.\begin{aligned} 0 &= (x_{RRj} - x_{RLi}) \\ 0 &= (y_{RRj} - y_{RLi}) \\ M_{Rxi} &= k_{R\alpha}(\phi_{RRj} - \phi_{RLi}) \\ M_{Ryi} &= k_{R\alpha}(\varphi_{RRj} - \varphi_{RLi}) \end{aligned}\right\} \tag{4-25}$$

### 4.1.2 建立系统的运动学方程

（1）总刚集成

要建立转子系统的运动学方程，关键是得到整个转子系统的质量矩阵、陀螺矩阵以及刚度矩阵。采用有限元方法基于梁单元对转子系统进行离散，由上节可知每一个单元的运动方程及对应的质量矩阵、陀螺矩阵以及刚度矩阵，要形成总的运动方程，就是进行总刚集成。

对于上节形成的轴段单元的质量矩阵而言：可用如下形式表示：

$$[M_s]^i = [M_{sT}]^i + [M_{sR}]^i = \begin{bmatrix} [m_{11}]_s^{(i)} & [m_{12}]_s^{(i)} \\ [m_{21}]_s^{(i)} & [m_{22}]_s^{(i)} \end{bmatrix} \tag{4-26}$$

其中，$i$ 表示第 $i$ 个轴段，$[m_{ab}]_s^i, (a=1,2;b=1,2)$ 为 $2\times2$ 的方阵。

假设具有 N 个结点，其间用 N-1 个轴段连接而成的转子系统，忽略轴承座的等效质量，则系统的位移向量用下式表示：

$$\left.\begin{aligned} \{U_1\} &= \left[x_1, \theta_{y1}, x_2, \theta_{y2}, \cdots, x_N, \theta_{yN}\right]^T \\ \{U_2\} &= \left[y_1, -\theta_{x1}, y_2, -\theta_{x2}, \cdots, y_N, -\theta_{xN}\right]^T \end{aligned}\right\} \tag{4-27}$$

综合各个轮盘以及轴段单元的运动方程，可以得到转子系统的运动学方程：

$$\left.\begin{aligned} [M_1]\{\ddot{U}_1\} + \Omega[J_1]\{\dot{U}_2\} + [K_1]\{U_1\} &= \{Q_1\} \\ [M_1]\{\ddot{U}_2\} - \Omega[J_1]\{\dot{U}_1\} + [K_1]\{U_2\} &= \{Q_2\} \end{aligned}\right\} \tag{4-28}$$

其中，整体质量矩阵 $[M_1]$，回转矩阵 $\Omega[J_1]$ 以及刚度矩阵 $[K_1]$ 均是 $2N\times2N$ 阶的对称稀疏带状矩阵，半带宽为 4。由上节可知，弹性支承、联轴器的作用可以通过广义力 $\{Q_1\}$、$\{Q_2\}$

来考虑。图 4.3 是总刚矩阵的形成过程，以质量矩阵为例：

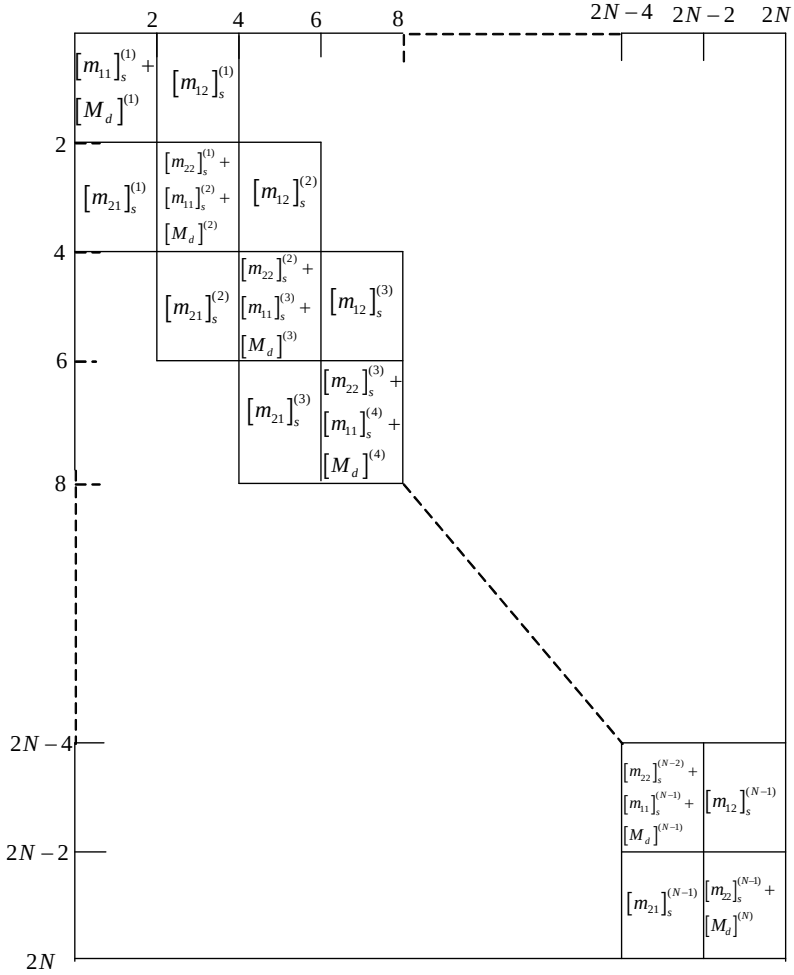



图 4.3 质量矩阵集成示意图

其中，对角线上的$4\times4$阶方阵表示各轴段单元的一致质量矩阵$[M_s]^{(i)}\ (i=1,2,\cdots,N-1)$对整体质量矩阵的贡献，各圆盘的质量矩阵$[M_d]^{(i)}\ (i=1,2,\cdots,N)$则叠加在对角线的$2\times2$阶方阵内。如果节点$j$处没有圆盘，则位于$2j-1,2j$行$2j-1,2j$列的$[M_d]^{(j)}$为$[0]$。类似的，可以形成$[J_1]$、$[K_1]$。对于聚缩质量矩阵以及回转矩阵，综合后的整体$[M_1]$和$[J_1]$仍然是对角矩阵。

（2）关于支承和联轴器的处理

在上述矩阵形成过程中，没有考虑支承条件和联轴器的影响，只是在广义力中表示出的影响。实际上，支承和联轴器的影响可以通过等式变换，将其转化对质量矩阵、回转矩阵以及刚度矩阵的影响。

以弹性支承为例，假设第 $j$ 个支承的刚度系数为 $k_x$ 和 $k_y$，对应的广义力由式（4-22）可知，该广义力可以移到式（4-28）等号的左边，并入刚度矩阵的相对应元素内。同理，联轴器处理也可做类似处理。

如果支承或者联轴器两个方向上的刚度不同，则式（4-28）应该改成：

$$\left.\begin{aligned}[M_1]\{\ddot{U}_1\}+\Omega[J_1]\{\dot{U}_2\}+[K_x]\{U_1\}=\{Q_1\}\\ [M_1]\{\ddot{U}_2\}-\Omega[J_1]\{\dot{U}_1\}+[K_y]\{U_2\}=\{Q_2\}\end{aligned}\right\} \tag{4-29}$$

此时，等号右边广义力中已经不包含联轴器以及支承的反作用力。

### 4.1.3 转子系统的涡动频率与临界转速

在这里，仅讨论轴承为各向同性时，于是有 $[K_x]=[K_y]=[K_1]$，由上式（4-28）可得到它的齐次式：

$$\left.\begin{aligned}[M_1]\{\ddot{U}_1\}+\Omega[J_1]\{\dot{U}_2\}+[K_1]\{U_1\}=\{0\}\\ [M_1]\{\ddot{U}_2\}-\Omega[J_1]\{\dot{U}_1\}+[K_1]\{U_2\}=\{0\}\end{aligned}\right\} \tag{4-30}$$

这里，$[K_1]$ 包括支承刚度以及联轴器角刚度和径向刚度的贡献。令 $\{Z\}=\{U_1\}+i\{U_2\}$ 表示，于是上式（4-30）可以合并为：

$$[M_1]\{\ddot{Z}\}-\Omega[J_1]\{\dot{Z}\}+[K_1]\{Z\}=\{0\} \tag{4-31}$$

这是 $2N$ 个具有复系数的二阶线性微分方程组。设它的解：

$$\{Z\}=\{Z_0\}e^{i\omega t} \tag{4-32}$$

其中，$\{Z_0\}$ 中各元素均为复数。将（4-32）式代入（4-31）式中得到：

$$\left[-M_1\omega^2+J_1\Omega\omega+K_1\right]\{Z_0\}=\{0\} \tag{4-33}$$

于是，得到其频率方程：

$$\left|-M_1\omega^2+J_1\Omega\omega+K_1\right|=0 \tag{4-34}$$

这是一个有关 $\omega$ 的 $4N$ 次代数方程，通常总是可以求得 $2N$ 正实根和 $2N$ 负实根。对应于

每一个求得的实根$\omega_r$，代入（4-33）式中可以得到$2N$个具有实系数的线性代数方程组，由此可以得到该$r$阶的模态振型。即在这组方程中，令$\{Z_0\}$中某一个复数元素为：$A_r e^{i\alpha_r}$，则从方程组中任选$2N-1$个方程可求得$\{Z_0\}$中元素的比例解：$\{\phi^{(r)}\}\{Z_0\}=A_r e^{i\alpha_r}\{\phi^{(r)}\}$，其中，$\{\phi^{(r)}\}$为实数向量，它表示该阶的模态振型。

转子的临界角速度可以在频率方程中令$\Omega=\omega$求得，在同步正向涡动中，临界转速往往少于$2N$个，而在同步反向涡动中则有$2N$个。

## 4.2 基于 MATLAB 的有限单元法编程

有限元法的 MATLAB 编程，同样采用 M 函数文件编写功能函数，与传递矩阵法共用参数输入界面，如图 3.10 所示，点击菜单项“临界转速求解”，在子菜单中选择“有限元法”，便可用有限元法求解同一转子系统的临界转速。不同于传递矩阵法的是，有限元法需要对轴段划分网格，因此在点击“有限元法”后将弹出图 4.4 所示的对话框，在此对话框中主要输入单元划分的参数，如果不予以输入，默认每一个轴段为一个单元，然后进行求解，求解完成后将会显示出临界转速，设置所画振型阶数后点击振型图可以绘制对应振型图。

采用有限元法求解临界转速，主要的编程过程可以用如图 4.5 所示的流程图表示：

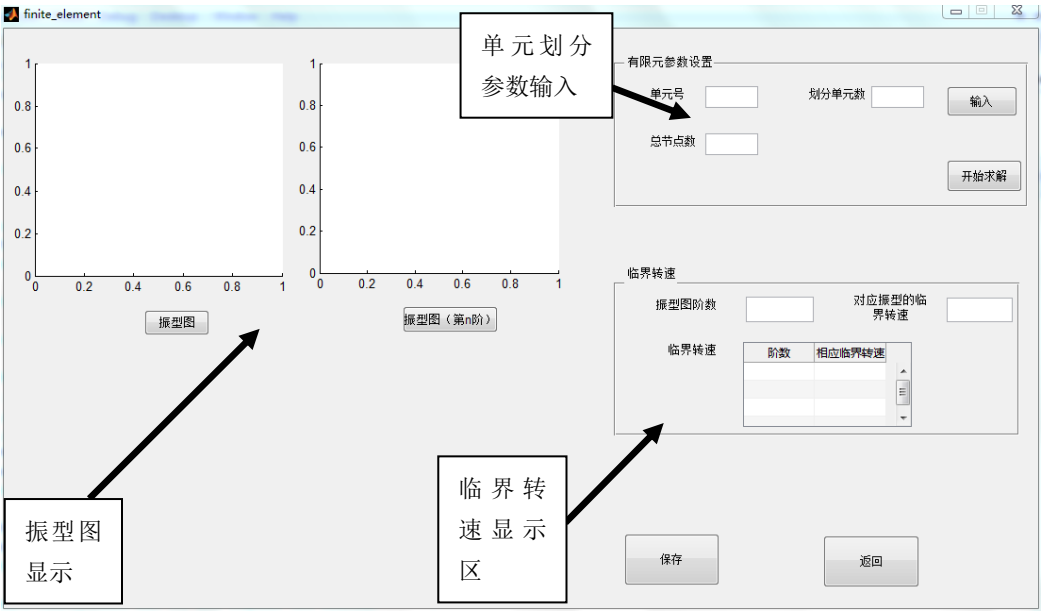



图 4. 4 有限元参数输入及结果显示界面

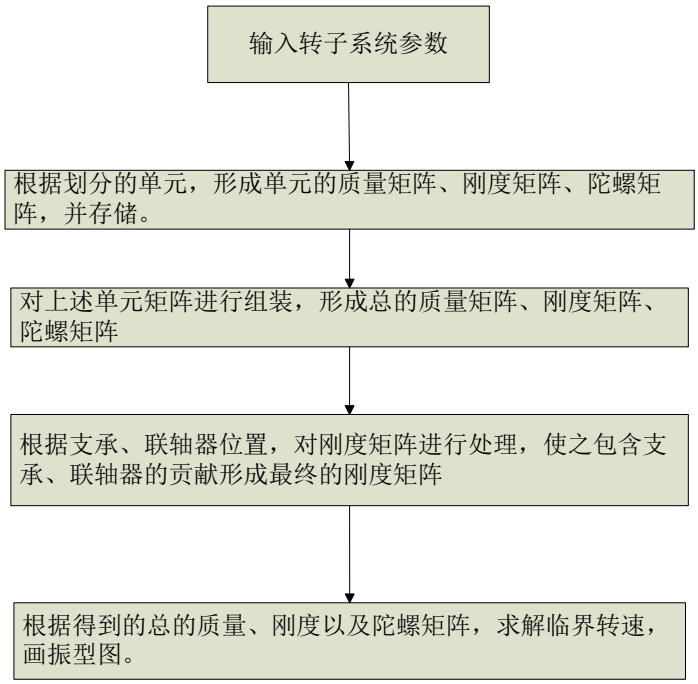



图 4.5 有限元法编程流程示意

## 4.3 临界转速计算分析

打开参数输入界面，导入上章中保存的转子模型参数，点击“临界转速求解”菜单，选择“有限元法”，弹出有限元求解的对话框，对每一个轴段均划分 4 个单元，求解，当弹出“求解完成”对话框时，表示求解已完成，此时将会显示出临界转速值，如图 4.6 所示，由图可以看出对此结构划分了共 24 个节点，23 个单元。临界转速显示区主要显示了此转子模型的前三阶临界转速，分别为 29.19Hz，115.56Hz，279.36Hz。将有限元结果与传递矩阵法结果进行对比，如表 4.1 所示，可知两种方法求解的低阶临界转速相差不大，且都可以与实验符合，验证了传递矩阵法和有限元法的正确性。图 4.7、4.8 所示为有限元法的一二阶振型图，与实验结果和传递矩阵法求解结果均相符。

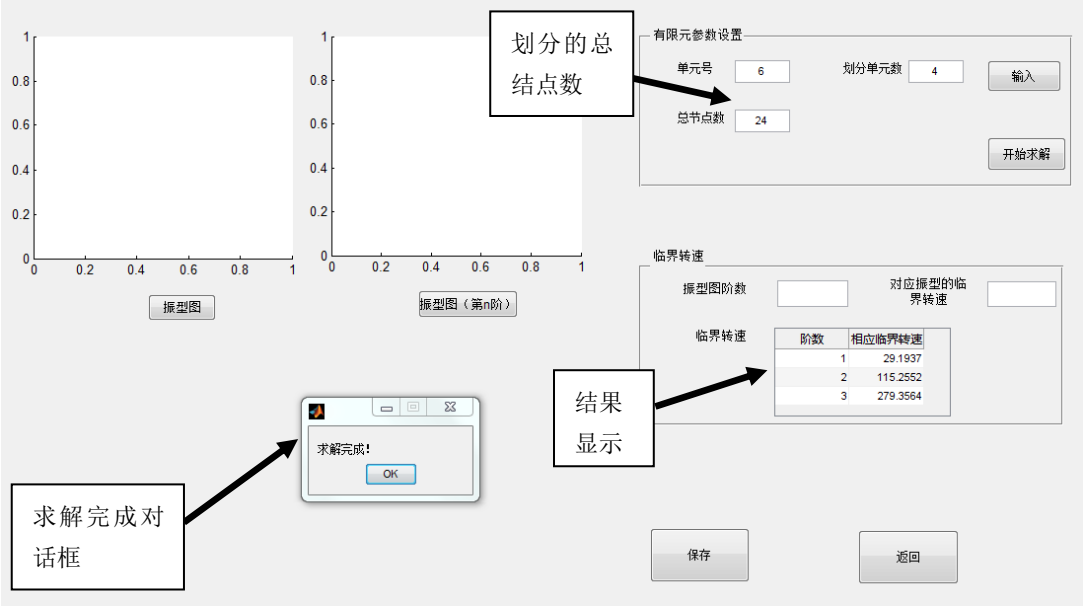



图 4.6 有限元法求解显示图

表 4.1 两种方法求解结果对比表

| 临界转速阶数 | 临界转速值/Hz(有限元) | 临界转速值/Hz(传递矩阵) | 两种方法求解相对误差 |
|---|---|---|---|
| 1 | 29.19 | 29.28 | -0.31% |
| 2 | 115.26 | 116.76 | -1.28% |

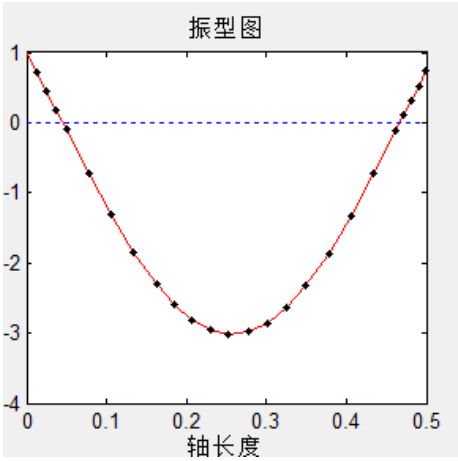



图 4.7 一阶振型图

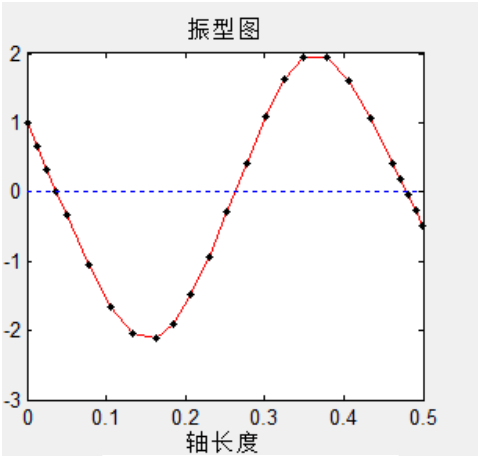



图 4.8 二阶振型图

## 4.4 本章小结

本章首先介绍基于梁单元法的有限元法求解临界转速的原理，然后基于 MATLAB 软件编写计算转子系统临界转速的通用程序，并编写了有限元法的 GUI 子界面，然后在输入参数主界面中输入实际模型参数进入子界面求解，求解结果同传递矩阵法结果以及实验结果可以很好的吻合，验证了一维简化模型的合理性以及有限元法的正确性。

# 第五章 基于 ANSYS 软件的临界转速分析

ANSYS 软件是一个功能强大而灵活的大型通用商业化的工程分析软件。能够进行包括结构、热、流体（包括计算流体动力学）、电场、电磁场等多学科研究，广泛应用在铁道、核工业、石油化工、航空航天、机械制造、汽车交通、能源、电子、国防军工、生物医学、土木工程、轻工、水利、地矿、造船等工业和科学领域，是世界上拥有用户最多、最成功的有限元软件之一。ANSYS 提供的分析类型主要有：静力分析；模态分析；瞬态动力学分析；谐响应分析等。

针对第二章中搭建的转子试验器以及第三章中建立的模型，在 ANSYS 中分别建立其一维和三维有限元模型，然后进行转子动力学分析，从而得到临界转速和对应振型。

## 5.1 ANSYS 解决转子动力学问题

在 ANSY14.0 中，通过结构力学模块来求解转子系统临界转速，并且可以考虑陀螺力矩的影响。可以采用两种类型，一种是基于梁单元的一维模型；另一种是基于实体单元的三维模型。两种模型各有其优缺点，一维模型对实际转子做出的简化程度相比三维模型要大，且只能考虑弯曲振动，但计算耗时短，占用内存小；三维模型具有高的保真度，更能模拟转子实际情况，尤其是对于短跨复杂转子，计算结果更能准确考虑结构间的动力影响，但是计算模型大，求解速度慢。

### 5.1.1 ANSYS 求解临界转速的一般步骤

ANSYS 执行一个典型的分析任务要经过三个步骤：前处理、求解、后处理。

（1）前处理

1）指定任务名以及分析标题

2）定义单元类型：由于临界转速计算要考虑陀螺力矩的影响，因此选取的单元必须能够考虑陀螺力矩。在固定坐标系下，多种单元可以考虑陀螺效应，包括：beam188,solid185,solid187 等。对于一维模型可以采用 beam 单元，三维可以采用 solid187 单元。

3）定义单元实常数：具体根据单元类型设置。

4）定义材料特性：主要是设置密度、弹性模量、泊松比。

5）建立有限元模型：有限元模型生成方法有两种，一种是实体建模法，另一种是直接生成法。实体建模法首先创建实体模型，然后划分网格；直接生成法可以直接创建节点、单元。两种方法可以混合使用。

（2）求解

1）选择分析类型和指定分析选项：要进行临界转速求解，要选定模态分析选项。同时，要指定复特征值求解，即 QRDAMP 求解器。此外还要打开陀螺效应。

2）施加载荷和约束：主要对支承处一端进行全约束；另外施加旋转速度载荷。

3）指定载荷步选项：要求解临界转速，需要指定多个旋转速度，此时要施加多个载荷步。

4）求解：主要是从 ANSYS 数据库中获得模型和载荷信息，进行计算求解。

（3）后处理

求解完成后，就可以在通用后处理器中查看结果了。主要是画 campell 图，得出临界转速，并观察对应振型，对于一维模型，还可以观察它的涡动轨迹。

### 5.1.2 有限元模型

（1）一维模型

采用一维模型建立转子系统的计算模型，主要基于以下假设:

转轴采用 beam188 梁单元，需要定义截面参数和材料参数，梁单元可以考虑剪切变形以及质量分布。

1）轮盘作为点单元处理，采用 mass21 单元，可以考虑质量、转动惯量。

2）支承作为弹簧单元处理，采用 Combine14 单元。

3）联轴器可以采用 MATRIX27 单元，它是一种自定义单元，虽然没有限定的几何特性，但是其弹性运动学响应可以采用刚度、阻尼或者质量矩阵来指定。使用刚度矩阵，定义对应的实常数，可以考虑联轴器径向刚度和角刚度。

根据上述假设，建立上述转子系统的一维有限元模型，如下图 5.1 所示：

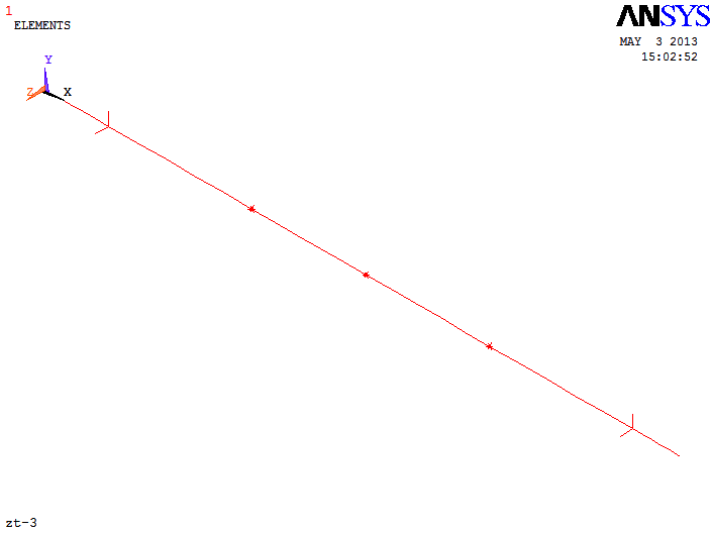



图 5.1 一维有限元模型图

（2） 三维模型

三维模型转轴轮盘采用 solid187 单元，支承仍然采用 combine14 单元。三维有限元模型如图：

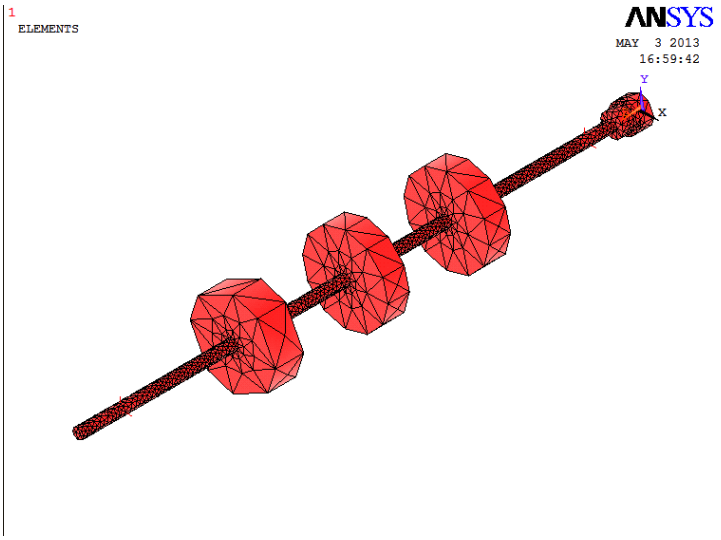



图 5.2 三维有限元模型图

## 5.2 一维有限元计算结果分析

对于上述图 5.1 所示的一维有限元模型，选取多个转速，进行求解，得到 campell 图 5.3 如下：

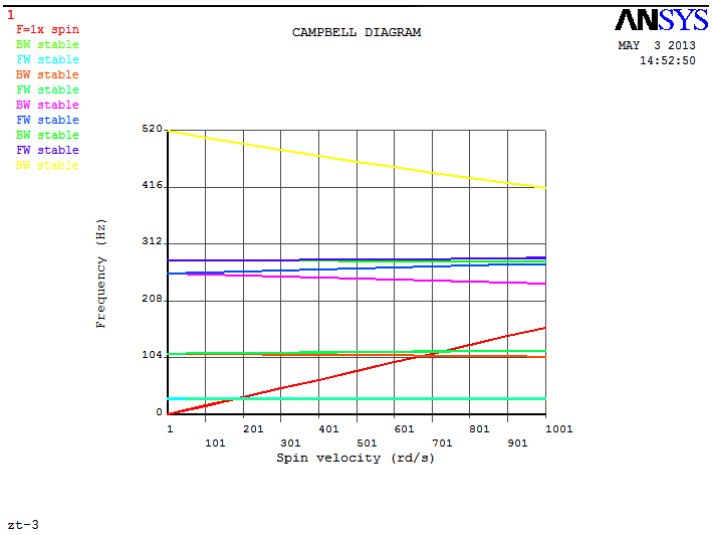



图 5.3 一维模型的坎贝尔图

其中，斜率为 1 也就是“F=1X”的直线与其它线的交点就是各阶正涡动的临界转速和反涡动的临界转速。由于我们更关心正涡动，因此只取正进动的临界转速，其中，一阶临界转速为 29.20Hz，二阶临界转速为 115.57Hz。

图 5.4 为一阶振型以及涡动轨迹，图 5.5 为二阶振型以及涡动轨迹。可以看出，与上述两种方法对比，临界转速基本一样，振型也很吻合。对于涡动轨迹而言，因为我们取两个方向的支承刚度相同，所以涡动轨迹为圆；若两个方向支承刚度不同，则涡动轨迹应该为椭圆。

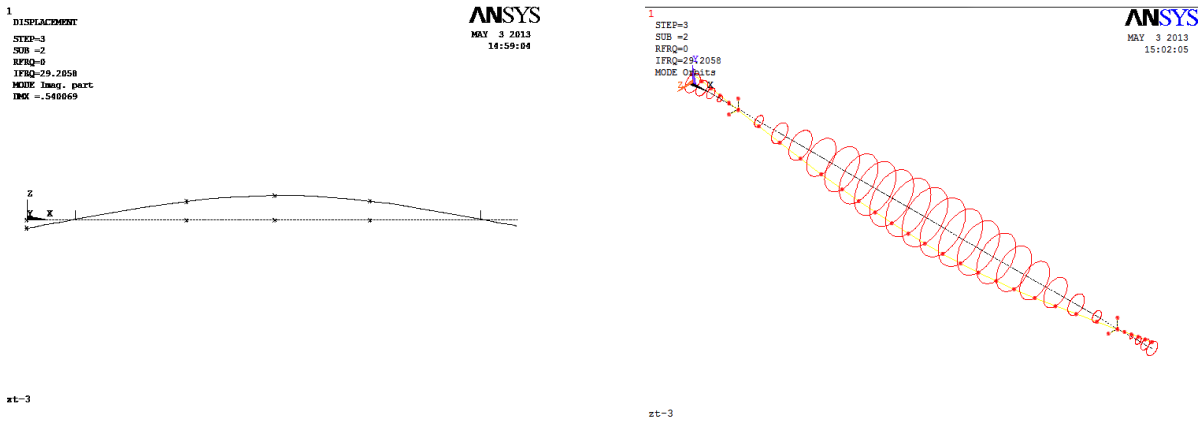



图 5. 4　一阶振型和涡动轨迹图

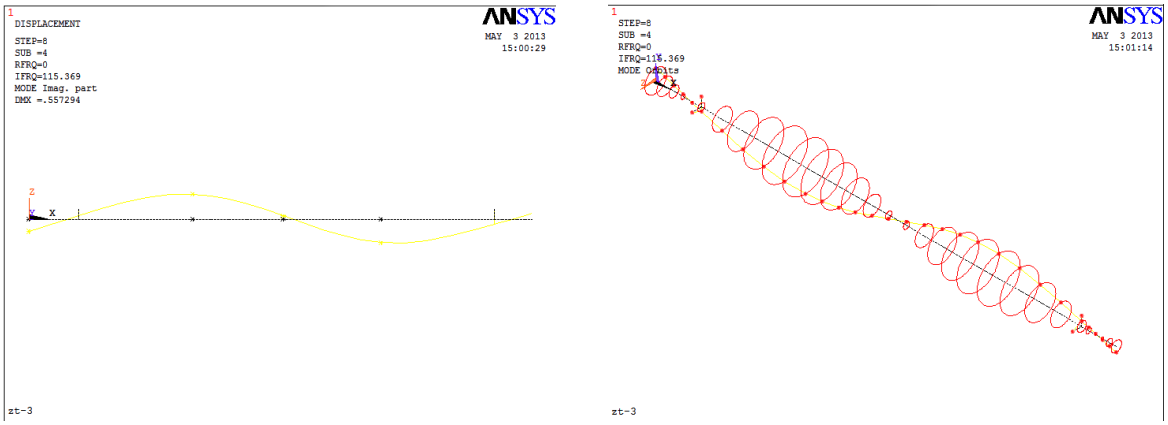



图 5. 5 二阶振型和涡动轨迹图

## 5.3 三维有限元计算结果分析

如图 5.2 所示的三维有限元模型，由于其节点数、单元数要相比一维模型大的多，因此计算时间明显增加，为了节省时间，相比一维模型，可以少取几个转速，求出的坎贝尔图如图 5.6 所示，由此可以得到一阶临界转速为 32.34Hz，二阶临界转速为 131.07Hz。对应的一阶振型和二阶振型如图 5.7、5.8 所示。与上述一维模型求解的结果比较，临界转速有些差别，但这是由于有限元模型的不同引起的，在可以接受范围内。振型图与上述计算方法以及实验结果并无差异。

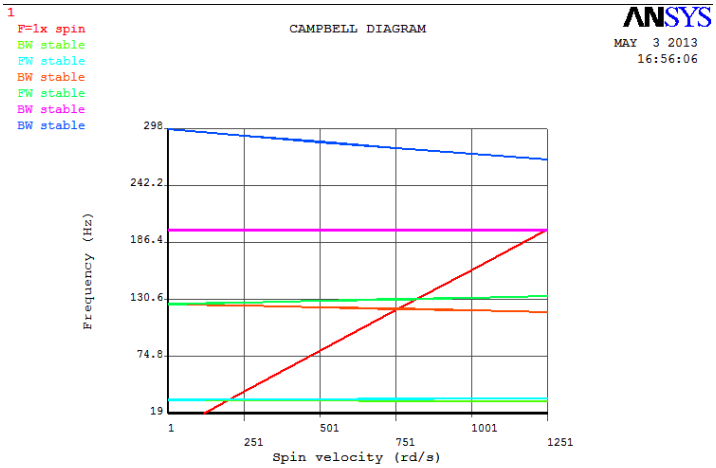



图 5.6 三维模型的坎贝尔图

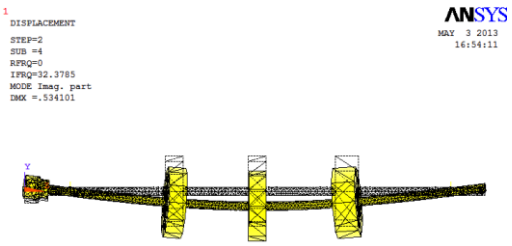



图 5.7 三维模型一阶振型图

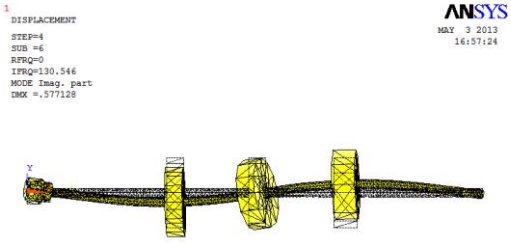



图 5.8 三维模型二阶振型图

## 5.4 几种方法计算结果总结分析

本章以及上面几章分别采用不同方法求解搭建的实际转子系统模型，并得到了结果。现在将几种方法结果对比总结如下表 5.1 所示，据表可知，几种方法求出的结果与实验的误差在可以接受的范围内，误差来源主要有采用支承静刚度引起的误差、测量尺寸时引起的误差、

采用一维简化模型引起的误差以及计算方法本身存在误差，当然由于实验条件限制，实验结果本身也会与实际存在些许误差，但这并不影响结论。各种方法的振型也均能很好的吻合。

对于这种跨度较长的转子模型，在实际计算中，采用一维模型可以很好的求出结果同时又大大节约了计算时间，在发动机设计的初级阶段往往使用一维模型求解临界转速，从而为初步设计提供依据，不过一维模型只能考虑弯曲振型，在计算中可能会漏掉某一阶扭转振型对应的频率，也不能考虑盘轴耦合的现象。对于一些复杂短跨转子，一维模型通常会引起较大误差，这时三维模型便可以显示其优越性，它可以更好地模拟转子的真实情况，如考虑盘、轴以及叶片的耦合以及一些局部模态，得出的结果更能符合实际，在发动机详细设计阶段三维模型便显示它的不可替代性，当然它需要花费更多的计算时间。考虑各种模型和计算方法的优缺点，在实际计算中需要根据实际情况具体判断选择或者综合运用不同的模型和方法。

**表 5.1 几种方法结果以及实验结果汇总对比**

| | 一、二阶临界转速值/Hz | 与实验误差率 |
|---|---|---|
| 传递矩阵法（MATLAB 编程） | 29.280 | 4.69% |
| | 116.76 | 4.17% |
| 有限元方法（MATLAB 编程） | 29.190 | 4.98% |
| | 115.26 | 5.41% |
| 有限元方法（ANSYS 一维模型） | 29.200 | 4.95% |
| | 115.57 | 5.15% |
| 有限元方法（ANSYS 三维模型） | 32.340 | 5.27% |
| | 131.07 | 7.57% |
| 实验结果 | 30.720 | 0 |
| | 121.85 | 0 |

## 5.5 本章小结

本章主要是基于 ANSYS 的转子动力学分析，介绍了求解临界转速的一般过程，以及建模时一些典型单元的选取和注意事项，针对所搭建的转子试验器，建立它的一维和三维有限元求解模型并且进行求解，最后将上几章的结果以及本章的结果与实验结果进行了比较分析，验证了这几种方法求解转子临界转速的正确性。

# 第六章 总结与展望

## 6.1 全文工作总结

本文主要对一般转子系统的临界转速方法进行了研究，重点讨论了传递矩阵法和有限元法的计算原理，并编写了 MATLAB 程序，同时对 ANSYS 求解转子临界转速的方法也进行了研究和讨论，最后通过实验验证计算理论的正确性。主要工作是：

（1）了解 ZT-3 转子系统的结构功能，对相关实验设备如传感器原理进行了解，同时学习了数据采集处理软件的操作。

（2）通过动刚度实验近似得到支承静刚度值，然后通过临界转速实验得到搭建的转子试验器的临界转速和振型。

（3）针对实际转子试验器，通过 CATIA 建立三维模型，并利用其测量功能得到盘的参数，建立计算模型。

（4）分别采用 MATLAB 编制一维模型的传递矩阵、有限元法的临界转速通用计算程序，然后通过 MATLAB 的 GUI 编写界面，实现良好的人机交互，对实际转子试验器求解临界转速和振型；最后在 ANSYS 软件中建立一维和三维有限元模型，得到临界转速和振型。

（5）上述几种方法的结果以及实验结果进行比较分析。

在整个的实验、计算、分析过程中，得到了转子系统的临界转速，在实际的旋转机械设计中，工作转速应该避开这些临界转速，防止共振对机器造成损害甚至出现事故。

## 6.2 论文工作展望

本文采用了多种方法对实际的转子系统的临界转速进行了计算求解。由于本人的精力、水平有限，在论文的写作过程中还存在不足之处，在今后的研究中还有以下工作有待于继续研究：

（1）本文计算模型是一个结构比较简单的盘轴结构，实际的发动机转子结构复杂，它包含鼓筒、盘以及叶片等，如何准确建立其计算模型有待进一步研究。

（2）本文的计算支承采用静刚度进行计算，实际发动机中，支承形式多种多样，转子与

机匣形成的是一个耦合系统，如何考虑这些复杂的因素，有待进一步解决。

（3）转子临界转速计算方法有多种，每种方法的适用情况有所差异，对于实际的复杂转子系统而言，要准确计算其临界转速，除了准确考虑实际转子的各种因素外，方法的选取也很重要，考虑多种方法的综合使用应该是准确计算临界转速的又一种途径，这有待进一步研究。

# 参 考 文 献


[1] 王军锋,孙康.基于有限元法的转子临界转速计算[J].机械设计,2012,29（12）:10～13.

[2] 史亚杰,王孝利,洪杰,朱梓根.柔性转子动力特性研究[J].航空发动机,2005,31(1):14～17.

[3] 陈果.双转子航空发动机整机振动建模与分析[J].振动工程学报,2011,24（6）:619～632.

[4] 张利民,王克明,吴志广.利用 ANSYS 进行转子临界转速计算[J].沈阳航空工业学院学报,2010,27(5):34～37.

[5] 赵文涛. 考虑实测支承动刚度的航空发动机整机振动建模与验证[D]. 南京:南京航空航天大学,2012.

[6] 钟一锷,何衍宗,王正,等.转子动力学[M].北京:清华大学出版社,1987.

[7] 王晓军.基于有限元和 QZ 算法的转子临界转速计算分析[D]. 北京:北京航空航天大学,2001.

[8] 王海涛.某型航空发动机整机振动特性分析[D].南京:南京航空航天大学,2010.

[9] 季晓中.转子临界转速的测定与计算[J].汽轮机技术,1999,41（2）:79～81.

[10] 马威猛,王建军.基于 ANSYS 的转子动力学分析[J].现代振动与噪声技术,1999,8(2):535～538.

[11] 卢露,刘德志,魏克银.各向同性支撑结构转子的临界转速研究[J].船电技术,2007,27(5):269～272.

[12] 蔡真.微型发动机结构及动力学建模分析[D].南京:南京航空航天大学,2007.

[13] 顾家柳.转子动力学[M].北京:国防工业出版社,1985.

[14] 陈萌,马艳红,刘书国,等.航空发动机整机有限元模型转子动力学分析[J].北京航空航天大学学报,2007,33(9):1013～1016.

[15] 吴元东.考虑连接刚度和阻尼的整机振动设计技术研究[D].南京:南京航空航天大学,2010.

[16] 洪杰,王华,肖大为,等.转子支承动刚度对转子动力特性的影响分析[J].航空发动机,2008,34(1):23～27.

[17] 缪辉.某型航空发动机转子系统动力学特性的有限元分析[D].沈阳:沈阳航空航天大学,2011.

[18] 航空发动机设计手册总编委会.航空发动机设计手册（第 19 分册）转子动力学及整机振动[M].北京:航空工业出版社,2000: 208～226.

[19] 张志涌,等.精通 MATLAB 6.5 版[M].北京:北京航空航天大学出版社,2003.

[20] Chiang H W,Hsu C N, Tu S H. Rotor-bearing analysis for turbo-machinery single-and dual-rotor systems[J]. Journal of Propulsion and Power,2004,20(6):1096～1104.

[21] Chen G.A new rotor-ball bearing-stator coupling dynamic model for whole aero-engine vibration [J].Journal of Vibration and Acoustics,2009,131(6):061009-1～061009-9.

[22] Hsuan~The Hu,Kou~Long Wang,Vibration Analysis of Rotatin Laminated Cylindrical Shells,American Institute of Aeronautics and Astronautics,2007,45(8):2051~2061.

[23] W.Leissa,Vibration of Shells,Scientific and Technical Information Office,1973:124~176.

[24] Loic Peletan, Sebastien Baguet, Georges Jacquet-Richardet, Mohamed Torkhani. Use and Limitations of The Harmonic Balance Method for Rub-Impact Phenomena in Rotor-Stator Dynamics[J].Proceedings of ASME Turbo Expo,2012.

[25] 叶先磊,史亚杰.ANSYS 工程分析软件应用实例[M].北京:清华大学出版社,2003.

[26] 高耀东,刘学杰.ANSYS 机械工程应用精华 50 例[M].北京:电子工业出版社,2011.

# 致　　谢

本研究及学位论文是在陈果老师的悉心指导下完成的，从论文的选题、工作的展开到论文的撰写，陈老师都给予了我极大地指导与不懈的支持。在这四个月的毕设过程中，在学术思想和实验研究态度及方法上，陈老师对我严格要求，给我提供了充足的动手和动脑机会，并不断教导我们做事要精益求精，善于思考，敢于创新，感激之余，让我知道自己的求知道路还很长。陈老师渊博的学识，严谨的学术态度，先锋的创造精神，孜孜不倦的工作情怀以及平易近人，乐观积极的人生态度都使我受益匪浅，在此，向陈老师致以衷心的感谢！

感谢实验室的王海飞博士、郝腾飞博士、李爱博士以及赵斌师兄、程小勇师兄、李旭鹏师兄、李华师姐、同学梁是和汪瑾，他们共同营造的良好的学习氛围以及给予的不断的支持鼓励是我学习的基础和动力。尤其感谢王海飞、郝腾飞、赵斌、程小勇几位师兄和同学梁是在理论、实验以及论文撰写方面予以的帮助。

感谢我的大学同学，尤其是我的三位舍友刘炳勋、汪雷、汪骏勇，四年的陪伴与共同学习让我拥有了一个无比美好的大学时光，愿友谊长存并希望大家都有一个美好的未来。

感谢民航学院的老师们在我们四年的大学生活中的谆谆教诲和辛苦付出！

感谢母校——南京航空航天大学为我们的成长与成才所提供的一切！